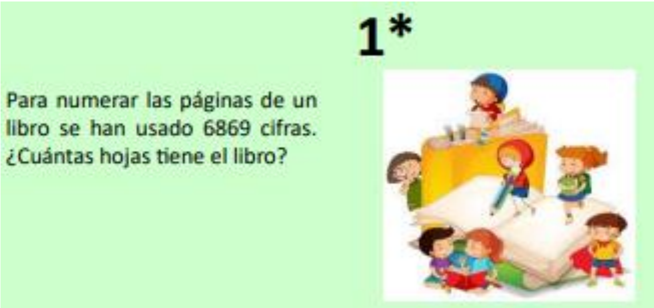
SOLUCIONES JUNIO 2024



Solución:

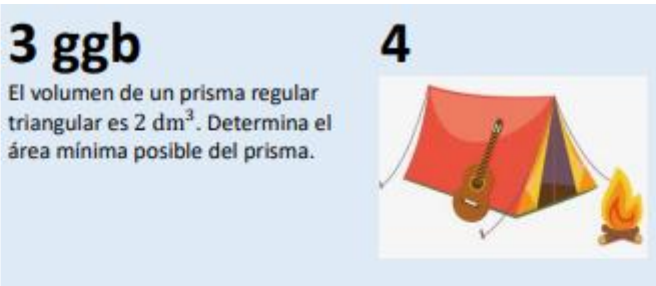
Cifras por página	Desde	Hasta	Total	Acumulado
1	1	9	9	9
2	10	99	90·2=180	189
3	100	999	900·3=2 700	2 889
4	1 000	9 999	9 000·4=36 000	38 889

Con lo que paginamos todas las que necesitan 3 cifras, pero no todas las de 4.

Como usamos 6869 y las de hasta 3 cifras acumulamos 2 889, las que faltan

(6869-2889=3980) corresponden a números de 4 cifras. En total 3980:4=995 números, desde el 1000 hasta el 1994.

En total hemos numerado 1994 páginas por lo que el número de hojas será la mitad ya que en cada hoja numeramos dos páginas, es decir, el libro tiene 1994:2=997 hojas.



Solución con geogebra:

Sea x la arista de la base del prisma y h la altura del mismo.

El àrea del prisma es:

$$S = 2\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 3xh$$

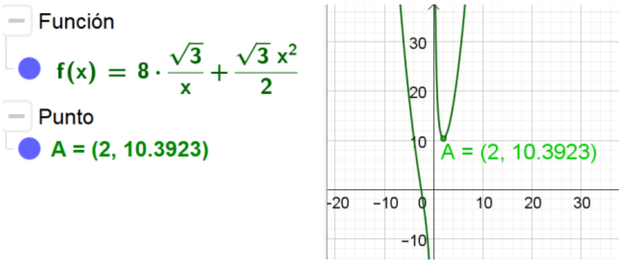
El volumen del prisma es:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 h = 2 \;\; \rightarrow \;\; h = \frac{8\sqrt{3}}{3x^2}$$

Entonces el área del prisma es:

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{8\sqrt{3}}{x}$$

Hallamos el mínimo de la función área usando geogebra, para lo cual introducimos la función en la barra de entrada y obtenemos



En la barra de entrada mínimo(f,0,10) obtiene el punto A, que nos indica que el mínimo de la función área se obtiene cuando la arista de la base x mide 2 dm, y el valor mínimo del área es de 10.3923 dm^2.

Solución analítica:

Sea a la arista de la base del prisma y h la altura del mismo.

El área del prisma es:

$$S = 2\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3ah$$

El volumen del prisma es:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 h = 2 \;\; \rightarrow \;\; h = \frac{8\sqrt{3}}{3a^2}$$

Entonces el área del prisma es:

$$S(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{8\sqrt{3}}{a} \;\; \text{con } a > 0.$$

$$S(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2 + \frac{16}{a}\right), \qquad a > 0$$

Derivando la función:

$$S'(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2a - \frac{16}{a^2}\right)$$

$$S'(a) = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$a = 2$$

$$S"(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 + \frac{32}{a^3}\right)$$

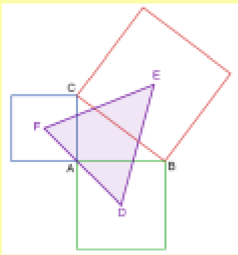
$$S"(2) = 3\sqrt{3} > 0.$$

Por lo tanto en $a = 2$ se obtiene el mínimo de la función área.

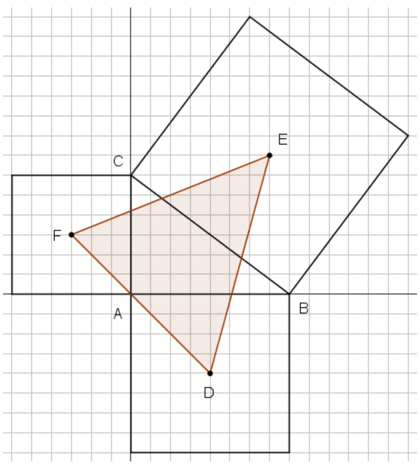
El área mínima es $S(2) = 6\sqrt{3}\ dm^2 \cong 10.3923\ dm^2$.

5** **6**

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden AB=8 cm y AC=6 cm. Se construyen cuadrados sobre los tres lados del triángulo. Se unen los centros de los cuadrados formando otro triángulo DEF. Calcula el valor exacto de su área.



Solución:



Si se representa los puntos en unos ejes de coordenadas:

$$A:(0,0) \qquad B:(8,0) \qquad C:(0,6)$$

Los puntos D, E y F tienen de coordenadas:

$$D:(4,-4) \qquad E:(7,7) \qquad F:(-3,3)$$

La longitud de los lados es:

$$f = d(D,E) = \sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}\ cm$$

$$d = d(E,F) = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}\ cm$$

$$e = d(D,F) = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98}\ cm$$

Para calcular el área utilizamos la fórmula de Herón:

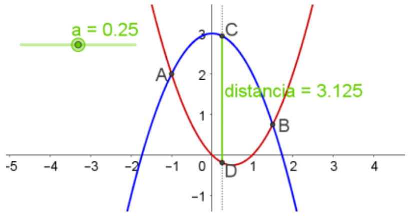
$$s = \frac{d+e+f}{2} = \frac{\sqrt{116} + \sqrt{98} + \sqrt{130}}{2}\ cm$$

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-d)(s-e)(s-f)} = 49\ cm^2$$

7 ggb **8**

Sean las parábolas:
$y = x^2 - x,\ y = 3 - x^2$.
Determina los puntos de corte de las dos parábolas. Calcula la máxima distancia vertical entre las dos parábolas de la zona comprendida entre los dos puntos de corte.

Solución con geogebra:



1. Introducimos en la barra de entrada las dos parábolas.
2. Hallamos los puntos de corte entre ambas.
3. Introducimos un deslizador de número con valores entre las abscisas de los dos puntos de corte.
4. Introducimos en la barra de entrada la recta vertical x=a.
5. Hallamos los puntos de intersección de esta recta con las dos parábolas y trazamos el segmento que los une.
6. Desplazamos el deslizador hasta obtener la mayor longitud posible de la longitud del segmento.
7. Obtenemos que la longitud máxima se alcanza cuando a=0.25 y es de 3.125 unidades.

Solución analítica:

Lo primero es hallar los puntos de corte: $\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = 3 - x^2 \end{cases} \rightarrow\ x^2 - x = 3 - x^2 \ \rightarrow$

$2x^2 - x - 3 = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \ \rightarrow$ los puntos de corte son $(-1, 2)\ y\ \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Ahora necesitamos una función que nos dé la distancia entre dos puntos, uno de cada parábola, con la misma abscisa.

Los puntos serán $A(x, x^2 - x)\ y\ B(x, 3 - x^2)$.

La función que nos dará la distancia entre ambos:

$$d(x) = \sqrt{(x-x)^2 + (3 - x^2 - (x^2 - x\ ))^2} = 3 - x^2 - \left(x^2 - x\ \right) = -2x^2 + x + 3$$

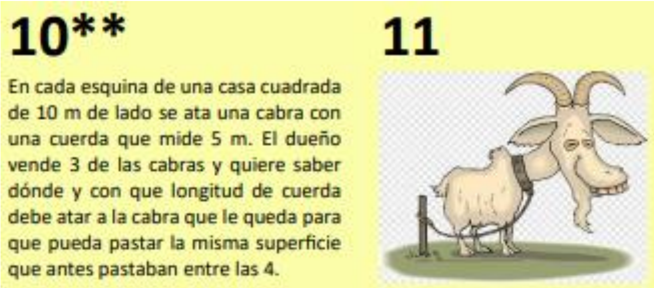
Para maximizar derivamos:

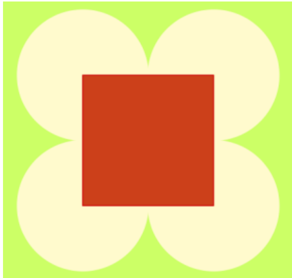
$$d'(x) = -4x + 1$$

Al igualar a cero, obtenemos $x = 1/4$.

Comprobamos que es máximo: $d''(x) = -4 < 0 \quad \rightarrow$ es máximo.

La distancia máxima será $\quad d\left(\frac{1}{4}\right) = -2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + 3 = \frac{25}{8} = 3{,}125 \;\; u.$





Solución:

Al principio, con cuatro cabras, la superficie que dejarán sin hierba al pastar será de ¾ de círculo cada una, en total 4·3/4=3 círculos de 5 m de radio:

$$S_4 = 3 \cdot \pi \cdot 5^2 = 75\pi \;\; m^2$$

A la cabra que queda al final, habrá que alargarle la cuerda para que coma lo mismo. Si la pusiéramos en un punto donde la casa no le molestara, con una cuerda de 10 m, comería una superficie de $\pi \cdot 10^2 = 100\pi \;\; m^2$.

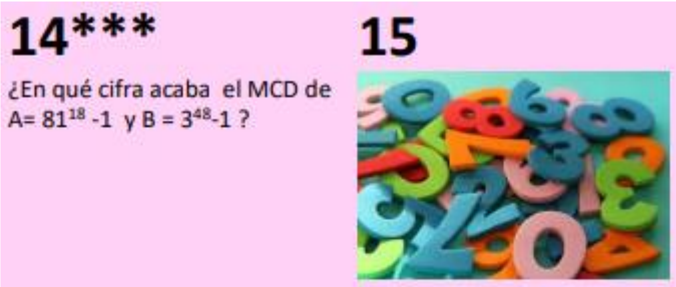
Como debe comer $75\pi \;\; m^2$, de $100\pi \; m^2$ tendríamos que evitar que comiera la cuarta parte. Esto lo conseguimos si la atamos en una esquina de la casa con una cuerda de 10 m de largo.

Solución:

Teniendo en cuenta que las arañas tienen 8 patas y los escarabajos 6, podemos afirmar que si los 8 insectos fueran todos escarabajos, obtendría 6·8=48 patas, pero tiene 6 patas más (54-48=6), que deben corresponder a las arañas, dos para cada una, o lo que es lo mismo, a 3 arañas.

Deducimos entonces que tiene 3 arañas y 5 escarabajos.

(3·8+5·6=24+30=54 patas)

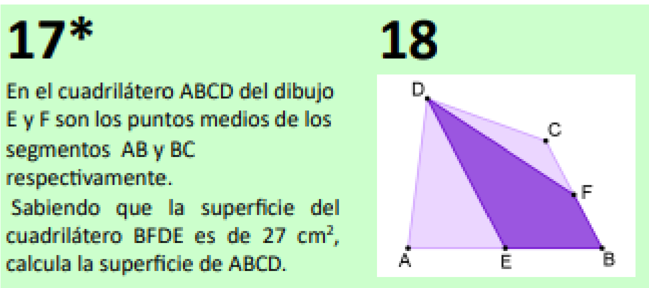


Solución:

Se cumple que $A = 81^{18} - 1 = (3^4)^{18} - 1$ y $B = 3^{48} - 1 = (3^4)^{12} - 1$.

Como $3^4 = 81$, podemos asegurar que cualquier potencia de 3^4 acabará en 1.

Por esto, tanto A como B acaban en 0, de donde deducimos que los dos números son divisibles por 10, y el MCD(A, B) es múltiplo de 10, y por lo tanto, acaba en 0.

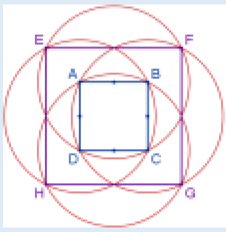


Solución:

Si trazamos el segmento que une los vértices B y D, dividimos el cuadrilátero ABCD en dos triángulos: ABD y BCD, cada uno de los cuales está partido en dos triángulos de igual superficie, ya que los segmentos ED y FD van del punto medio de la base al vértice, con lo que tienen la misma base y la misma altura, por lo que la superficie del cuadrilátero ABCD es el doble de la del BFDE, es decir, 54 cm^2.

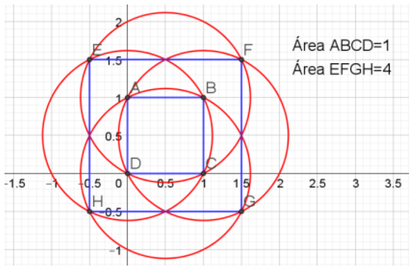
19 ggb 20

Sean A, B, C y D los vértices de un cuadrado. Con centro en los puntos medios de cada lado, se traza una circunferencia que pasa por los dos vértices del lado opuesto. Si el lado del cuadrado ABCD mide 1 cm, calcula el área del cuadrado EFGH.

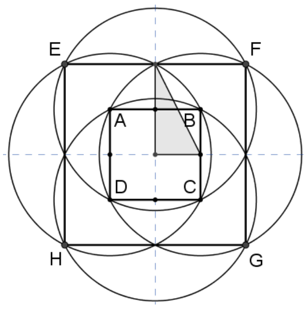


Solución con geogebra:

1. Dibujamos el cuadrado ABCD con lado 1.
2. Hallamos los centros de cada uno de los lados del cuadrado.
3. Trazamos las cuatro circunferencias.
4. Hallamos los puntos de corte (E, F, G y H).
5. Trazamos el cuadrado EFGH y hallamos el área. Obtenemos 4 u^2.



Solución analítica:



El radio de la circunferencia es:

$$r^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\, cm$$

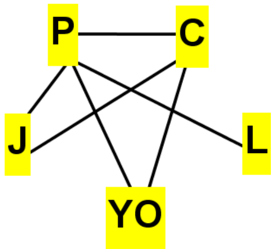
En este triángulo rectángulo, la hipotenusa coincide con el radio, el cateto menor mide $\frac{1}{2}$ cm y el cateto mayor mide 1 cm. Por lo tanto, el lado del cuadrado EFGH mide 2 cm.

$$A = 2^2 = 4\, cm^2$$

21*

Somos 5 amigos. Cada día, Pau intercambia mensajes con cada uno de los otros 4. Carles lo hace solo con 3, Josep con 2 y Lluís con 1. ¿Con cuántos lo hago yo?

22



Solución:

Como Pau intercambia mensajes con todos y Lluís solo con uno, este debe ser Pau.

Si Carles lo hace con tres, el único con quien no contacta será Lluís.

Con esto, Josep ya contacta con dos: Pau y Carles.

Yo contactaré con dos, que serán Pau y Carles.

24**

a) ¿Cuántos múltiplos comunes de 6 cifras tienen el 36, 42 y 63?

b) Si $A=10^3 \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot 7^2$; $B=12^2 \cdot 15^3 \cdot 7^4$ y $C=18^4 \cdot 30^2 \cdot 28^3$, ¿Cuántos divisores comunes, múltiplos de 10, tienen A, B y C?

25

Solución:

a)MCM(36, 42, 63)=252.

Podemos asegurar que todos los múltiplos comunes de 36, 42 y 63 pueden escribirse como 252·n.

Buscamos los de seis cifras, es decir, los comprendidos entre 100 000 y 999 999.

Para calcular el menor, dividimos 100 000: 252= 396,8… y el número que buscamos será el resultado de multiplicar 252·397=100 044.

Para el mayor dividimos 999 999:252=3968,3… de donde deducimos que el número buscado es 252·3968=999 936.

El resto de los números buscados serán los que obtendremos al multiplicar 252 por los valores enteros entre 397 y 3968. En total 3968−396=3572 números.

Hay 3572 múltiplos comunes de seis cifras.

b) Calculamos

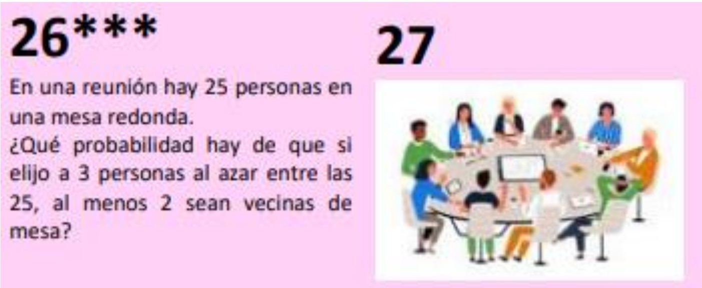
$$\text{MCD}(A, B, C)=19\,600=2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = (2 \cdot 5) \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 10 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

Para obtener todos los divisores que sean múltiplos de 10, mantenemos el 10 de la factorización y vamos variando el resto $(2^3 \cdot 5 \cdot 7^2)$.

Cada uno de estos tres números puede no usarse o usarse las veces que permita su exponente en la factorización (el 2 tres veces, el 5 una y el 7 dos), por lo que la cantidad de divisores distintos que podremos obtener será el resultado de multiplicar (3+1)(1+1)(2+1)=4·2·3=24

El 3+1 corresponde a las opciones del 2, el 1+1 a las del 5 y el 2+1 a las del 7, siendo el +1 la opción de no usarlo.

Hay 24 divisores comunes múltiplos de 10.



Solución:

Las posibles formas distintas de elegir a tres personas de un grupo de 25 son

$C_{25,3} = \frac{25\cdot24\cdot23}{3\cdot2\cdot1} = 2300.$

El que al menos dos estén sentadas juntas, puede ocurrir de dos formas: las tres juntas, o dos juntas y una separada.

Para elegir a las tres juntas, hay 25 opciones (basta pensar que elegimos a uno y los otros dos son los que están sentados junto a él).

Para el caso de dos juntos y uno separado, empezaremos por elegir a los dos juntos. Esto es posible también de 25 formas (supongamos que elegimos a uno y el otro es el sentado a su derecha). El que falta, no puede ser uno de los dos que ya tenemos ni sus vecinos, por lo que debemos elegir entre $25 - 4 = 21$ personas.

El total de opciones posibles será $25 \cdot 21 = 525$.

La probabilidad pedida será:

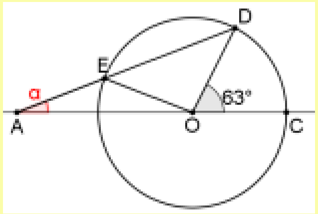
$$P(al\ menos\ dos\ juntos) = P(tres\ juntos) + P(dos\ juntos\ y\ uno\ separado) =$$

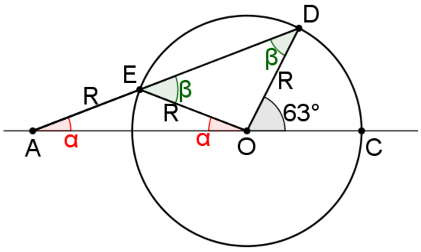
$$= \frac{25}{2300} + \frac{525}{2300} = \frac{550}{2300} = \frac{11}{46}.$$

28**

29

En la figura adjunta conocemos que $\overline{AE} = \overline{OD}$ y que el ángulo $\widehat{COD} = 63°$.
¿Cuánto mide el ángulo α?





Solución:

Sabemos que $\overline{AE} = \overline{OD} = \overline{OE} = R$, por lo que podemos asegurar que los triángulos AOE y EDO son isósceles, y por tanto tienen dos ángulos iguales tal y como se ve en el dibujo.

Podemos afirmar que en el triángulo AOE, el ángulo en E mide $\hat{E} = 180° - 2\alpha$.

De la misma forma, en el triángulo EDO, $\hat{O} = 180° - 2\beta$.

Al ser un ángulo llano en O se cumple que $63° + \hat{O} + \alpha = 180°$,

lo mismo que en E $\hat{E} + \beta = 180°$.

$$\begin{cases} \hat{E} = 180° - 2\alpha \\ \hat{E} + \beta = 180° \end{cases} \quad \rightarrow \quad 180° - 2\alpha + \beta = 180° \quad \rightarrow \quad \beta = 2\alpha$$

$$\begin{cases} \hat{O} = 180° - 2\beta \\ 63° + \hat{O} + \alpha = 180° \end{cases} \quad \rightarrow \quad 63° + 180° - 2\beta + \alpha = 180° \quad \rightarrow \quad 63° - 2\beta + \alpha = 0$$

Sustituyendo en la segunda igualdad obtenemos:

$$63° - 2 \cdot 2\alpha + \alpha = 0 \quad \rightarrow \quad 63° = 3\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = 21°$$