

SOLUCIONS JUNY 2024

1*

Per numerar les pàgines d'un llibre s'han fet servir 6869 xifres. Quants fulls té el llibre?



Solució:

Xifres per pàgina	Des de	Fins a	Total	Acumulat
1	1	9	9	9
2	10	99	$90 \cdot 2 = 180$	189
3	100	999	$900 \cdot 3 = 2\,700$	2\,889
4	1\,000	9\,999	$9\,000 \cdot 4 = 36\,000$	38\,889

Amb això numerem totes les pàgines que necessiten 3 xifres, però no totes les de 4.

Com fem servir 6869 i les de fins a 3 xifres acumulem 2\,889, les que falten

$(6869 - 2889 = 3980)$ corresponen a números de 4 xifres. En total: $3980 : 4 = 995$ números, des del 1000 fins al 1994.

En total hem numerat 1994 pàgines. Aleshores el nombre de fulls serà la meitat, ja que en cada full hi ha dues pàgines. És a dir, el llibre té $1994 : 2 = 997$ fulls.

3 ggb

El volum d'un prisma regular triangular és 2 dm^3 . Determineu l'àrea mínima possible del prisma.

4



Solució amb geogebra:

Siga x l'aresta de la base del prisma i h l'altura.

L'àrea del prisma és:

$$S = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + 3xh$$

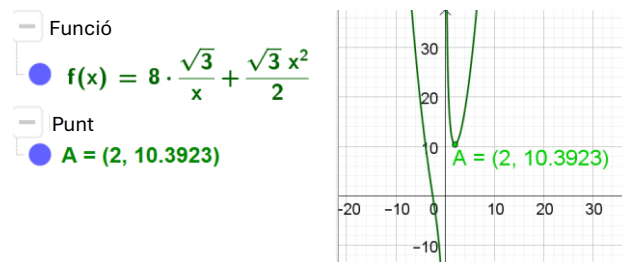
El volum del prisma és:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2h = 2 \rightarrow h = \frac{8\sqrt{3}}{3x^2}$$

Aleshores l'àrea del prisma és:

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{8\sqrt{3}}{x}$$

Calcularem el mínim de la funció àrea usant geogebra. Per fer això introduïm la funció a la barra d'entrada i obtenim:



Introduint en la barra d'entrada $\text{mínimo}(f,0,10)$ s'obté el punt A, que ens indica que el mínim de la funció àrea s'obté quan l'aresta de la base x mesura 2 dm, i el valor mínim de l'àrea és de $10.3923 dm^2$.

Solució analítica:

Siga a l'aresta de la base del prisma i h l'altura.

L'àrea del prisma és:

$$S = 2 \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3ah$$

El volum del prisma és:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h = 2 \rightarrow h = \frac{8\sqrt{3}}{3a^2}$$

Aleshores l'àrea del prisma és:

$$S(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{8\sqrt{3}}{a} \text{ amb } a > 0.$$

$$S(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(a^2 + \frac{16}{a} \right), a > 0$$

Derivant la funció:

$$S'(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(2a - \frac{16}{a^2} \right)$$

$$S'(a) = 0$$

Resolent l'equació:

$$a = 2$$

$$S''(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(2 + \frac{32}{a^3} \right)$$

$$S''(2) = 3\sqrt{3} > 0.$$

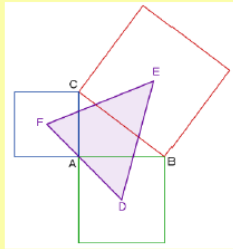
Per tant, en $a = 2$ s'obté el mínim de la funció àrea.

L'àrea mínima és $S(2) = 6\sqrt{3} \text{ dm}^2 \cong 10.3923 \text{ dm}^2$.

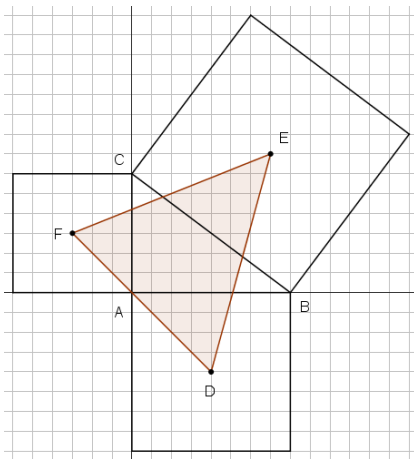
5**

6

El triangle ABC és un triangle rectangle els catets del qual mesuren $AB = 8 \text{ cm}$ i $AC = 6 \text{ cm}$. Es construeixen quadrats sobre els tres costats del triangle. S'uneixen els centres dels quadrats formant un altre triangle DEF. Calculeu-ne el valor exacte de l'àrea.



Solució:



Si es representen els punts en uns eixos de coordenades:

$$A(0,0) \quad B(8,0) \quad C(0,6)$$

Els punts D, E i F tenen de coordenades:

$$D(4,-4) \quad E(7,7) \quad F(-3,3)$$

La longitud dels costats és:

$$f = d(D,E) = \sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130} \text{ cm}$$

$$d = d(E,F) = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \text{ cm}$$

$$e = d(D,F) = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} \text{ cm}$$

Per calcular l'àrea del triangle utilitzem la fórmula d'Heró:

$$s = \frac{d + e + f}{2} = \frac{\sqrt{116} + \sqrt{98} + \sqrt{130}}{2} \text{ cm}$$

$$\text{Àrea} = \sqrt{s(s-d)(s-e)(s-f)} = 49 \text{ cm}^2$$

7 ggb**8**

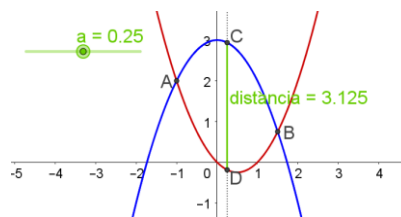
Siguen les paràboles:

$$y = x^2 - x, \quad y = 3 - x^2.$$

Determineu els punts de tall de les dues paràboles. Calculeu la màxima distància vertical entre les dues paràboles de la zona compresa entre els dos punts de tall.

**Solució amb geogebra:**

1. Introduïm en la barra d'entrada les dues paràboles.
2. Trobem els punts de tall entre ambdues.
3. Introduïm un botó lliscant de tipus nombre amb valors entre les abscisses dels dos punts de tall.
4. Introduïm en la barra d'entrada la recta vertical $x=a$.
5. Trobem els punts d'intersecció d'aquesta recta amb les dues paràboles i tracem el segment que els uneix.
6. Desplacem el botó lliscant fins obtenir la major longitud possible de la longitud del segment.
7. Obtenim que la longitud màxima s'assoleix quan $a=0.25$, i és de 3.125 unitats.

**Solució analítica:**

El primer és trobar els punts de tall: $\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = 3 - x^2 \end{cases} \rightarrow x^2 - x = 3 - x^2 \rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow$ els punts de tall són $(-1, 2)$ i $(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$.

Ara necessitem una funció que ens done la distància entre dos punts, un de cada paràbola, amb la mateixa abscissa.

Els punts seran $A(x, x^2 - x)$ i $B(x, 3 - x^2)$.

La funció que ens dona la distància entre els dos punts és:

$$d(x) = \sqrt{(x - x)^2 + (3 - x^2 - (x^2 - x))^2} = 3 - x^2 - (x^2 - x) = -2x^2 + x + 3$$

Per maximitzar aquesta funció la derivem:

$$d'(x) = -4x + 1$$

Igualem l'expressió a 0 i obtenim $x = 1/4$.

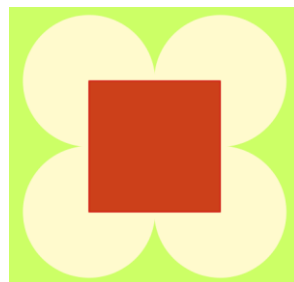
Comprovem que és un màxim: $d''(x) = -4 < 0 \rightarrow$ és màxim.

La distància màxima serà $d\left(\frac{1}{4}\right) = -2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + 3 = \frac{25}{8} = 3,125 \text{ u.}$

10**

A cada cantó d'una casa quadrada de 10 m de costat hi ha amarrada una cabra amb una corda que mesura 5 m. El propietari ven 3 de les cabres i vol saber on i amb quina longitud de corda ha de lligar la cabra que li queda perquè pugui pasturar la mateixa superfície que abans pasturaven entre les 4.

11



Solució:

Al principi, amb quatre cabres, la superfície que deixaran sense herba quan pasturen serà de $\frac{3}{4}$ de cercle cadascuna. En total: $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$ cercles de 5 m de radi:

$$S_4 = 3 \cdot \pi \cdot 5^2 = 75\pi \text{ m}^2$$

A la cabra que queda al final caldrà allargar-li la corda perquè menegi el mateix. Si la posem en un punt on la casa no la moleste, amb una corda de 10 m menjarà una superfície de $\pi \cdot 10^2 = 100\pi \text{ m}^2$.

Com ha de menjar $75\pi \text{ m}^2$, de $100\pi \text{ m}^2$ hauríem d'evitar que menjara la quarta part. Açò ho aconseguim si la lliguem a un cantó de la casa amb una corda de 10 m de llarg.

12*

Anna va agafar 8 insectes entre aranyes i escarabats. En comptar el nombre de potes, n'obté 54. Quantes aranyes i quants escarabats té?

13



Solució:

Tenint en compte que les aranyes tenen 8 potes i els escarabats 6, podem afirmar que si els 8 insectes fossin tots escarabats, obtindria $6 \cdot 8 = 48$ potes, però té 6 potes més ($54 - 48 = 6$), que han de correspondre a les aranyes, dues per a cadascuna, o el que és el mateix, a 3 aranyes.

Aleshores deduïm que té 3 aranyes i 5 escarabats.

$$(3 \cdot 8 + 5 \cdot 6 = 24 + 30 = 54 \text{ potes})$$

14***

En quina xifra acaba el MCD de
 $A = 81^{18} - 1$ i $B = 3^{48} - 1$?

15



Solució:

Es compleix que $A = 81^{18} - 1 = (3^4)^{18} - 1$ i $B = 3^{48} - 1 = (3^4)^{12} - 1$.

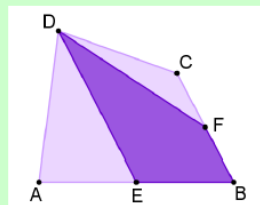
Com $3^4 = 81$, podem assegurar que qualsevol potència de 3^4 acabarà en 1.

Per açò, tant A com B acaben en 0, d'on deduïm que els dos nombres són divisibles per 10, i el MCD(A, B) és múltiple de 10, i, per tant, acaba en 0.

17*

En el quadrilàter ABCD del dibuix, E i F són els punts mitjans dels segments AB i BC, respectivament. Sabent que la superfície del quadrilàter BFDE és de 27 cm^2 , calcula la superfície del quadrilàter ABCD.

18



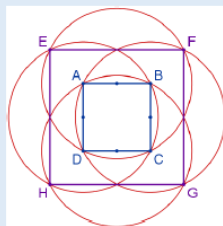
Solució:

Si tracem el segment que uneix els vèrtexs B i D, dividim el quadrilàter ABCD en dos triangles: ABD i BCD, cadascun dels quals està partit en dos triangles de la mateixa superfície, ja que els segments ED i FD van del punt mitjà de la base al vèrtex oposat, de manera que tenen la mateixa base i la mateixa altura. Aleshores, la superfície del quadrilàter ABCD és el doble de la del BFDE, és a dir, 54 cm^2 .

19 ggb

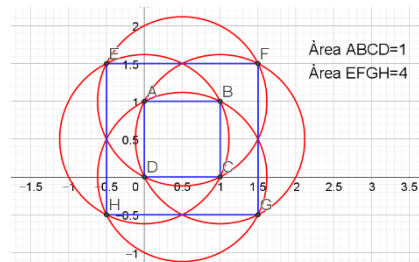
20

Siguen A, B, C i D els vèrtexs d'un quadrat. Amb centre en el punt mitjà de cada costat, es traça una circumferència que passa pels dos vèrtexs del costat oposat. Si el costat del quadrat ABCD mesura 1 cm, calcula l'àrea del quadrat EFGH.

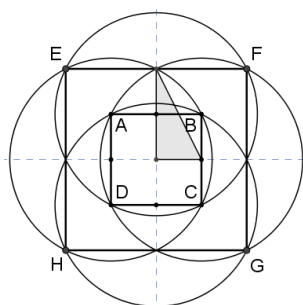


Solució amb geogebra:

1. Dibuixem el quadrat ABCD amb costat 1.
2. Trobem els centres de cadascun dels costats del quadrat.
3. Tracem les quatre circumferències.
4. Trobem els punts de tall (E, F, G i H).
5. Tracem el quadrat EFGH i trobem l'àrea. Obtenim $4 u^2$.



Solució analítica:



El radi de la circumferència és:

$$r^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \rightarrow r = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

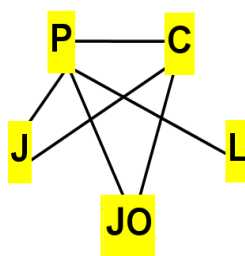
En aquest triangle rectangle, la hipotenusa coincideix amb el radi, el catet menor mesura $\frac{1}{2}$ cm i el catet major mesura 1 cm. Per tant, el costat del quadrat EFGH mesura 2 cm.

$$A = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$$

21*

Som 5 amics. Cada dia, Pau intercanvia missatges amb cadascun dels altres 4. Carles ho fa només amb 3, Josep amb 2 i Lluís amb 1. Amb quants ho faig jo?

22



Solució:

Com Pau intercanvia missatges amb tots i Lluís només amb un, aquest ha de ser Pau.

Si Carles ho fa amb tres, l'únic amb qui no contacta serà Lluís.

Amb això, Josep ja contacta amb dos: Pau i Carles.

Jo contactaré amb dos, que seran Pau i Carles.

24**

a) ¿Cuántos múltiplos comunes de 6 cifras tienen el 36, el 42 y el 63?

b) Si $A=10^3 \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot 7^2$, $B=12^2 \cdot 15^3 \cdot 7^4$ y $C=18^4 \cdot 30^2 \cdot 28^3$, ¿cuántos divisores comunes, múltiplos de 10, tienen A, B y C?

25



Solució:

a) $\text{MCM}(36, 42, 63)=252$.

Podem assegurar que tots els múltiples comuns de 36, 42 i 63 poden escriure's com $252 \cdot n$.

Busquem els de sis xifres, és a dir, els compresos entre 100 000 i 999 999.

Per calcular el menor, dividim $100\,000 : 252 = 396,8\dots$ i el nombre que busquem serà el resultat de multiplicar $252 \cdot 397 = 100\,044$.

Per al major dividim $999\,999 : 252 = 3968,3\dots$ d'on deduïm que el nombre buscat és $252 \cdot 3968 = 999\,936$.

La resta dels nombres buscats seran els que obtindrem en multiplicar 252 pels valors enters entre 397 i 3968. En total, $3968 - 396 = 3572$ números.

Hi ha 3572 múltiples comuns de sis xifres.

b) Calculem

$$\text{MCD}(A, B, C) = 19\,600 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = (2 \cdot 5) \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 10 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

Per obtenir tots els divisors que siguin múltiples de 10, mantenim el 10 de la factorització i anem variant la resta ($2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$).

Cadascun d'aquests tres nombres pot no usar-se o usar-se les vegades que permeti el seu exponent en la factorització (el 2 tres vegades, el 5 una i el 7 dos), per la qual cosa la quantitat de divisors diferents que podem obtenir serà el resultat de multiplicar $(3+1)(1+1)(2+1) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

El 3+1 correspon a les opcions del 2, el 1+1 a les del 5 i el 2+1 a les del 7, on el +1 afegeix l'opció de no usar-lo.

Hi ha 24 divisors comuns múltiples de 10.

26***

En una reuni3n hay 25 personas en una mesa redonda.

¿Qu3 probabilidad hay de que, si elegimos a 3 personas al azar entre las 25, al menos 2 sean vecinas de mesa?

27**Soluci3:**

Les possibles maneres diferents d'escollir tres persones d'un grup de 25 s3n

$$C_{25,3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2300.$$

El que almenys dues estiguin assegudes juntes, pot passar de dues maneres: les tres juntes, o dues juntes i una separada.

Per triar les tres juntes, hi ha 25 opcions (podem pensar que triem un i els altres dos s3n els que estan asseguts al seu costat).

Per al cas de dos junts i un separat, començarem per triar els dos junts. Aix3 3s possible tamb3 de 25 formes (suposem que triem un i l'altre 3s l'assegut a la dreta). Qui falta, no pot ser un dels dos que ja tenim ni els seus ve3ns, per la qual cosa hem de triar entre $25 - 4 = 21$ persones.

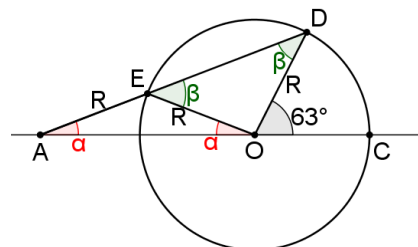
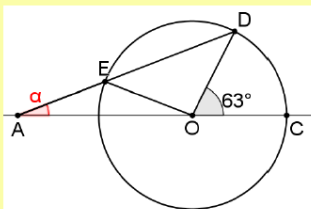
El total d'opcions possibles ser3 $25 \cdot 21 = 525$.

La probabilitat demanada ser3:

$$\begin{aligned} P(\text{almenys dos junts}) &= P(\text{tres junts}) + P(\text{dos junts i un separat}) = \\ &= \frac{25}{2300} + \frac{525}{2300} = \frac{550}{2300} = \frac{11}{46}. \end{aligned}$$

28**

En la figura adjunta conecmes que $\overline{AE} = \overline{OD}$ y que el 3ngulo $\widehat{COD} = 63^\circ$.
¿Cu3nto mide el 3ngulo α ?

29**Soluci3:**

Sabem que $\overline{AE} = \overline{OD} = \overline{OE} = R$, per la qual cosa podem assegurar que els triangles AOE i EDO s3n is3sceles, i, per tant, tenen dos angles iguals tal com es veu en el dibuix.

Podem afirmar que, en el triangle AOE, l'angle en E mesura $\widehat{E} = 180^\circ - 2\alpha$.

De la mateixa manera, en el triangle EDO, $\hat{O} = 180^\circ - 2\beta$.

Com que és un angle pla en O, es compleix que $63^\circ + \hat{O} + \alpha = 180^\circ$,

El mateix passa en E: $\hat{E} + \beta = 180^\circ$.

$$\begin{cases} \hat{E} = 180^\circ - 2\alpha \\ \hat{E} + \beta = 180^\circ \end{cases} \rightarrow 180^\circ - 2\alpha + \beta = 180^\circ \rightarrow \beta = 2\alpha$$

$$\begin{cases} \hat{O} = 180^\circ - 2\beta \\ 63^\circ + \hat{O} + \alpha = 180^\circ \end{cases} \rightarrow 63^\circ + 180^\circ - 2\beta + \alpha = 180^\circ \rightarrow 63^\circ - 2\beta + \alpha = 0$$

Substituint en la segona igualtat obtenim:

$$63^\circ - 2 \cdot 2\alpha + \alpha = 0 \rightarrow 63^\circ = 3\alpha \rightarrow \alpha = 21^\circ$$