SOLUCIONES · SEPTIEMBRE 2024

2* **3**

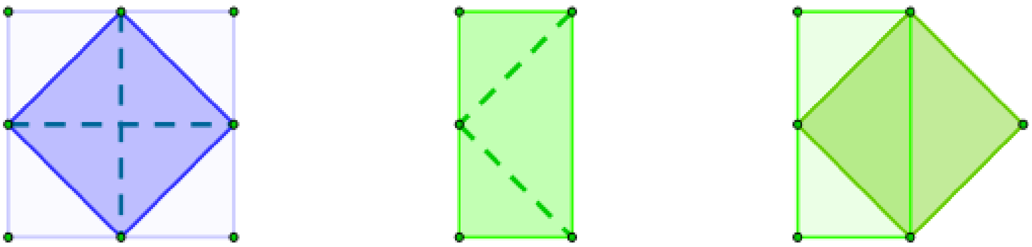
Tenemos un rectángulo de papel que es el doble de largo que de ancho. Córtalo en el mínimo número de trozos posible para formar con ellos un cuadrado que ocupe la misma superficie que el rectángulo.

SOLUCIÓN CON PAPIROFLEXIA:

Al tener un lado doble del otro, podemos considerar que es la mitad de un cuadrado.

El cuadrado que queremos formar tendrá la mitad de superficie que el original, que es lo que ocupa nuestro rectángulo.

Para conseguirlo, basta pensar en que cuando del cuadrado inicial doblamos de forma que los cuatro vértices se juntan en el centro del cuadrado, el que obtenemos ocupa justo la mitad que el que teníamos (ahora tenemos dos capas de papel donde antes teníamos una). Esos serán los cortes que debemos hacer:



Con dos cortes sería suficiente.

SOLUCIÓN ANALÍTICA:

Si los lados del rectángulo son x y 2x, su superficie será $S = x \cdot 2x = 2x^2$.

Si queremos un cuadrado con esta superficie, podemos calcular lo que mide un lado: $l = \sqrt{S} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$, que coincide con la diagonal de un cuadrado de lado x, que es la mitad de nuestro rectángulo. El resultado obtenido coincide con el de papiroflexia.

4***

Halla el mayor número de siete cifras distintas que cumple que es divisible por todas ellas.

5

SOLUCIÓN:

De las diez cifras posibles debemos eliminar tres. Está claro que una es el cero, ya que el número debe ser divisible por todas las cifras.

También es fácil descartar el 5, ya que para que el número sea divisible por él, debería acabar en 5 (ya hemos descartado el 0), y en ese caso no sería divisible por las cifras pares.

Falta descartar otro número. Teniendo en cuenta que están el 3, el 6 y el 9, las cifras deben sumar un múltiplo de 3 (o de 9).

Si sumamos S=1+2+3+4+6+7+8+9=40. Candidatos a ser eliminados para obtener un múltiplo de 3:

1	$S-1=39$
4	$S-4=36$
7	$S-7=33$

Al no ser candidato el 9 para ser eliminado, debemos obtener una suma múltiplo de 9. Solo es posible si eliminamos el 4.

Las cifras que usaremos serán: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9.

El número más grande que podemos formar con ellas es el 9876321, pero no es divisible por todas.

Que sea divisible por 1 no es necesario comprobarlo.

Si el número es divisible por 8, necesariamente lo será por 2.

Si es divisible por 9, también lo será por 3.

Al serlo por 2 y por 3, no necesitamos comprobar que lo sea por 6.

De todo esto, podemos deducir que si nuestro número es divisible por 7, 8 y 9, lo será por las siete cifras. O, lo que es equivalente, si es divisible por 7·8·9=504, lo será por todas.

Vamos a buscar el mayor múltiplo de siete cifras de 504 que cumpla que está formado por las cifras 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9.

Dividimos el mayor número con las siete cifras entre 504:

9876321:504=19595.875

Así que el mayor múltiplo posible de 504 será 504·19595=9875880, pero no sirve al no tener las cifras que queremos.

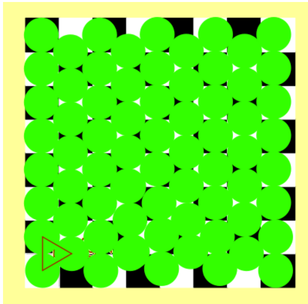
Si vamos restando 504 a este número, todos los resultados serán múltiplos de 504. (Con la calculadora, una vez hecha la primera resta, cada vez que pulsamos el =, vuelve a restar 504).

Al restar 17 veces, obtenemos 9875880−17·504=9867312, que es el número que buscábamos.

6 ggb

7

Tenemos un tablero de ajedrez en el que cada casilla mide 3 cm de lado, y tantas fichas de damas como queramos, todas con un diámetro de 3 cm. ¿Cuántas podemos poner como máximo sobre el tablero sin que estén superpuestas ni sobrepasen el borde del tablero?



SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

Está claro que en cada casilla se puede poner una ficha, así que las 64 fichas están garantizadas, pero hay otra solución mejor.

Si pensamos en cómo se empaquetan cosas circulares (o esféricas, como las naranjas), podemos ver que queda sitio para poner una línea más.

Para dibujar el tablero, empezaremos por un cuadrado de lado 3 que después desplazaremos horizontal y verticalmente hasta tener las 64 casillas del tablero.

Para desplazar horizontalmente, introduciremos en la barra de entrada el vector u=(3,0), y para hacerlo verticalmente, el v=(0,3).

Una vez dibujado el primer cuadrado (esquina inferior izquierda del tablero), con traslación de vector v, podemos conseguir la primera columna.

Para el resto, no es necesario hacerlo cuadrado a cuadrado, podemos seleccionar con el botón derecho toda la columna y trasladarla en bloque.

Nota: si quieres trasladar bloques mayores, es posible, pero puede ser que tengas que definir algún vector nuevo.

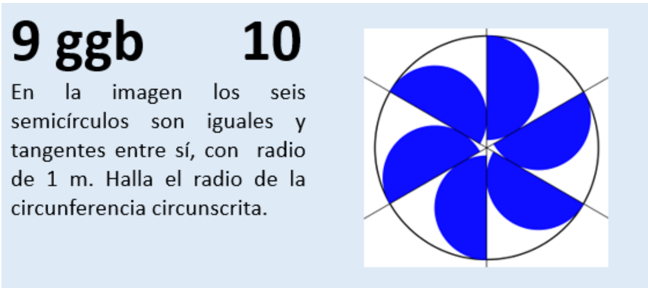
Ahora coloreamos un cuadrado en negro y otro en blanco. Con copiar estilo visual coloreamos el resto.

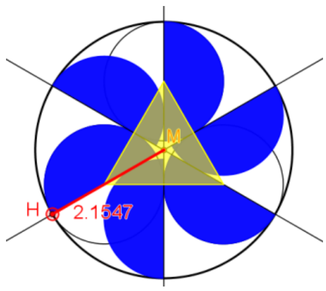
Las fichas las pondremos de forma similar. La primera con centro en el cuadrado inferior izquierdo y radio 1.5. La coloreamos de amarillo y en la pestaña de avanzado, seleccionamos la capa 2 para que queden encima del tablero.

La primera columna de fichas podemos completarla con desplazamiento vertical (con el vector v que hemos usado antes).

Para la segunda columna, debemos tener en cuenta que los vértices de tres fichas tangentes estarán sobre los vértices de un triángulo equilátero de lado 3. Los vectores necesarios para la traslación los podemos colocar sobre los lados de un triángulo que dibujaremos a un lado del tablero. (También podemos trasladar bloques)

A partir de aquí, podemos completar cinco columnas de 8 fichas y cuatro columnas de 7 fichas, lo que hace un total de 5·8+4·7=40+28=68 fichas, cuatro más que poniendo una en cada cuadrado.





SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

Para empezar, es conveniente fijarse en que si giramos tres semicircunferencias alternas, obtendremos en lugar de seis semicircunferencias, tres circunferencias completas iguales y tangentes entre sí sin que cambie el tamaño de la circunferencia externa. Si unimos los centros de las tres obtendremos un triángulo equilátero de lado 2 m.

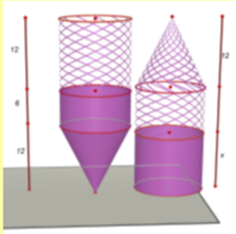
Los pasos a seguir serán:

1. Dibujamos un triángulo equilátero de lado 2.
2. Hallamos los puntos medios de los lados.
3. Con centro en cada uno de los vértices y pasando por los puntos medios de los lados dibujamos tres circunferencias.
4. Dibujamos las tres alturas del triángulo.
5. El radio que buscamos va del centro del triángulo (punto de corte de las alturas) al punto de corte de una de las alturas con la circunferencia correspondiente.

6. Trazamos el segmento entre los dos puntos. Obtenemos que el radio de la circunferencia es de 2,1547 m.

11   12**

En la imagen adjunta las dos figuras son iguales y contienen el mismo volumen de agua. El cono tiene una altura de 12 cm. En la de la izquierda, el agua en el cilindro alcanza una altura de 6 cm de los 18 que tiene en total. Halla la altura que alcanza el agua en la figura de la derecha.



SOLUCIÓN:

El volumen de agua del cuerpo de la izquierda está formado por un cono de radio r y altura 12 más un cilindro de radio r y altura 6.

$$V_{agua} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 12 + \pi r^2 \cdot 6$$

El volumen de agua del cuerpo de la derecha está formado por un cilindro de radio r y altura x

$$V_{agua} = \pi r^2 \cdot x$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 12 + \pi r^2 \cdot 6 = \pi r^2 \cdot x$$

Simplificando:

$x = 10$ cm

13***   **14**

Se lanza un dado tres veces y con los números obtenidos formamos un número A de 3 cifras (1ª tirada las centenas, la 2ª las decenas y la 3ª las unidades). De la misma forma, obtenemos un número B. Calcula la probabilidad de que A>B.

SOLUCIÓN:

Al ser todas las tiradas independientes, podemos asegurar que la probabilidad de que A sea mayor que B es la misma que la de que el mayor sea B:

P(A>B)=P(B>A)=p

Si llamamos q=P(A=B), tendremos que P(A>B)+P(B>A)+ P(A=B)=2p+q=1.

Para calcular P(A=B) tendremos en cuenta que A puede ser cualquier número, mientras que para las tres tiradas con las que formaremos B, sólo una de las seis opciones posibles será válida, de donde P(A=B)= $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6^3}$

$$2p+q=1 \quad \rightarrow \quad 2p+\frac{1}{6^3}=1 \quad \rightarrow \quad \mathrm{P(A>B)}=\ p=\frac{1-\frac{1}{6^3}}{2}=\frac{215}{432}$$

16**  **17** 

El conejo y el erizo hacen una carrera en una pista circular de 550 m. El conejo corre a una velocidad constante de 10 m/s y el erizo también constante de 1m/s. Empiezan a la vez desde el mismo punto, pero cada uno en un sentido. Cuando se encuentran, el erizo cambia de sentido y persigue al conejo. ¿Por cuántos segundos gana el conejo?

SOLUCIÓN:

Llamaremos t al tiempo que tardan en encontrarse (tiempo en segundos).

El conejo habrá recorrido 10t metros y el erizo 1t metros. Entre los dos, al ir en distintos sentidos, han recorrido la pista entera:

$$10t+t=550 \quad \rightarrow \quad t=\frac{550}{11}=50 \text{ segundos}$$

En ese tiempo, el conejo habrá recorrido 10·50=500 metros. Los 50 que le faltan los recorrerá en 5 segundos.

El erizo ha recorrido 50 metros, al cambiar de sentido, le quedan otros 50 metros que recorrerá en 50 segundos.

Cuando el erizo llegue a la meta, hará 45 segundos que ha llegado el conejo.

18* **19**

En el número 203700 a los dos últimos ceros los llamamos ceros terminales. ¿Cuántos ceros terminales tiene el resultado del producto 30 · 40 · 50 · 60 · 70 · 80 ?

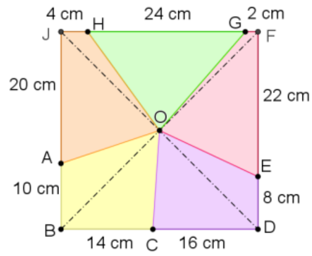
SOLUCIÓN:

Tendrá 7 ceros terminales. Equivale a hacer 3·10·4·10·5·10·...·8·10.

Seis ceros salen de los dieces y el otro de multiplicar el 5 por alguno de los números pares.

20** **21**

Parte una tarta cuadrada de 30 cm de lado en 5 trozos igual de grandes. Todos los cortes deben ser rectos y partir del centro de la tarta. El primero va del centro O a un punto A situado a 10 cm de una de las esquinas.



SOLUCIÓN:

Si la tarta tiene 30 cm de lado, la superficie que debemos cortar en 5 trozos ocupa 900 cm^2. Cada uno de los trozos debe ser de 900/5=180 cm^2.

El que todos los cortes sean rectos y partan del centro O, nos indica que cualquier triángulo que cortemos desde O a dos puntos del mismo borde, tendrá la misma superficie si las bases coinciden.

Trazando las dos diagonales del cuadrado tenemos cuatro triángulos que trocearemos para que cada lote tenga la misma base.

Dado que el perímetro de la tarta es de 30·4=120 cm, si hacemos cinco raciones, cada una debe tener una base de 120:5=24 cm.

Primera ración: con el corte que indica el problema, tenemos el triángulo ABO con 10 cm de base. Faltan 14 cm, que los conseguimos con el triángulo BCO.

Segunda ración: al cortar los 14 cm, hemos dejado un trozo con 16 cm de base (el triángulo CDO). Nos faltan los 8 cm del triángulo DEO.

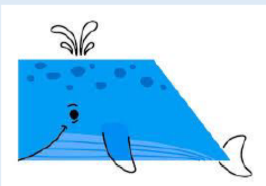
Tercera ración: el triángulo EFO tiene una base de 22 cm. Nos faltan los 2 cm del triángulo FGO.

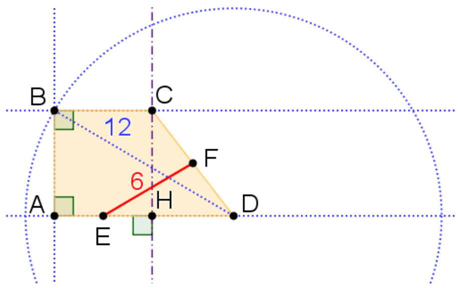
Cuarta ración: podemos cortar un único triángulo de 24 cm de base, el GHO.

Quinta ración: la obtenemos con los 4 cm del triángulo HJO y los 20 cm que han quedado en el lado del primer corte, el triángulo AJO.

23 ggb **24**

En un trapecio rectángulo ABCD (recto en A y B, con base mayor AD) trazamos la altura CH. Se pide la longitud del segmento que une los puntos medios de AH y CD sabiendo que entre B y D hay 12 cm.





SOLUCIÓN CON GEOGEBRA:

Para dibujar el trapecio seguiremos los siguientes pasos:

1. Sobre el eje de abscisas colocamos el punto D.
2. Como B está a una distancia de 12 cm de D, trazamos una circunferencia con centro en D y radio 12.
3. Colocamos el punto B sobre la circunferencia con punto en objeto.
4. Trazamos desde B la perpendicular al eje de abscisas, y con intersección hallamos A.
5. Por B trazamos una paralela al eje de abscisas y sobre ella (con punto en objeto) colocamos C.
6. Trazamos la altura en C y hallamos H con la intersección con el eje de abscisas.
7. Hallamos los puntos medios de los segmentos entre A y H (E) y entre C y D (F).
8. Unimos con un segmento E y F para medir la distancia que pide el problema.

La longitud es 6. Da igual en que parte de la circunferencia situemos B y en que parte de la recta situemos C, la longitud no varía, siempre es 6.

SOLUCIÓN ANALÍTICA (Pitágoras):

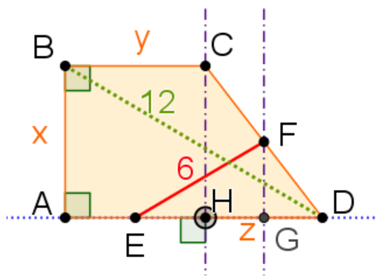
En el triángulo rectángulo ABD se cumple

$$x^2 + (y+z)^2 = 12^2$$

En el triángulo rectángulo EFG, la hipotenusa es la distancia que buscamos:

$$|EF| = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + (y+z)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{12^2} = 6$$



SOLUCIÓN ANALÍTICA (Semejanza):

Si observamos los triángulos ABD y EFG, veremos que son semejantes:

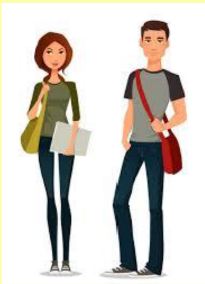
Los ángulos en A y G son rectos.

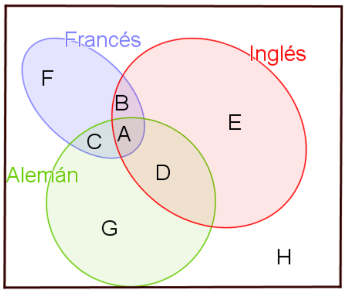
Los catetos de EFG son la mitad de largos que los de ABD, al tratarse de que E, F y G son los puntos medios de los segmentos que miden x, y, z.

Por lo que la hipotenusa de EFG también mide la mitad de lo que mide la de ABD, es decir, 6 cm.

25 26**

En una academia de idiomas hay 900 alumnos. Se sabe que 330 estudian inglés, 280 francés, 270 alemán, 50 inglés y francés, 60 inglés y alemán, 70 francés y alemán y 20 las tres cosas. ¿Cuántos estudian un único idioma? ¿Y ninguno de los tres?





Solución:

Si vamos pasando al gráfico la información de que disponemos, en A tendremos los que estudian los tres idiomas, es decir, 20.

B+A son los 50 que estudian inglés y francés, de donde B=30.

A+C son los 70 de francés y alemán, así que C=50.

A+D son los 60 de inglés y alemán, de aquí D=40.

A+B+D+E=330 que estudian inglés. Con los valores que ya tenemos: 20+30+40+E=330 , por lo que E=240.

A+B+C+F=280 de francés. De la misma forma, F=180.

A+C+D+G=270 de alemán. Obtenemos que G=160.

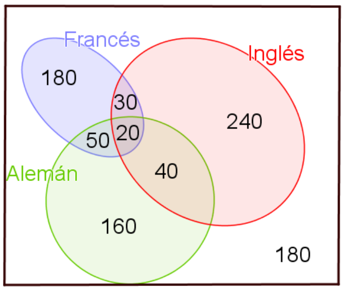
La respuesta a cuántos alumnos estudian un único idioma la obtendremos sumando E+F+G=180+240+160=580.

El número de alumnos que no estudia inglés, francés ni alemán, lo obtendremos sabiendo que en total hay 900 alumnos:

900-(180+30+20+50+160+40+240)=180

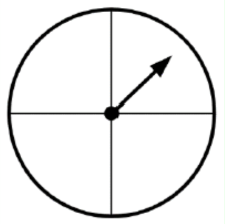
De otra forma:

900-(330+280+270-50-60-70+20)=180



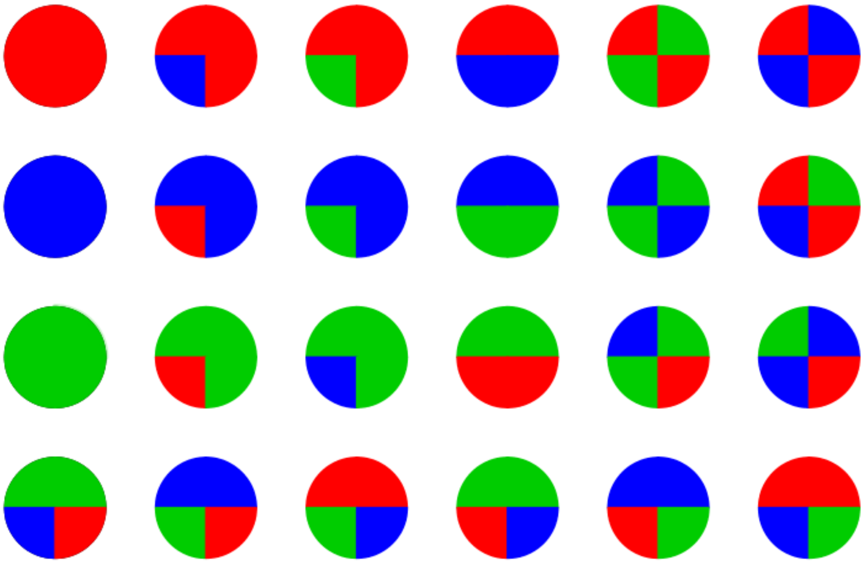
27* 28

Tenemos una ruleta partida en cuatro sectores iguales, como la imagen. Para pintarla, disponemos de 3 colores: rojo, verde y azul. ¿De cuantas formas distintas podemos hacerlo?
Nota: no es necesario usar los tres colores para pintar la ruleta.



SOLUCIÓN:

De 24 formas distintas:



30*

Rellena la tabla adjunta con números naturales de una cifra de forma que en cada fila y cada columna, el número central sea la media aritmética de los otros dos.

8		
		3
	5	

SOLUCIÓN:

Para resolverlo asignaremos letras a los números que buscamos:

8	a	b
c	d	3
e	5	f

Como 3 es la media aritmética de b y f, se cumple:

$$\frac{b+f}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad b+f=6$$

De la misma forma se cumple que $e+f=10$

Si comparamos las dos sumas, tenemos que $e=b+4$.

Para que la media de los dos casos en que aparece el 8 sea un número natural, es necesario que tanto b como e sean números pares. Las opciones posibles son:

b	2	4
$e=b+4$	6	8

Para que d sea un número natural, es necesario que tanto a como c sean impares, si no lo fueran, al dividir por 2 para hacer la media aritmética, obtendríamos un decimal.

b	2	4
$e=b+4$	6	8
$a=(8+b)/2$	5	6
$f=6-b$	4	

Rellenamos con la información que tenemos:

8	5	2
7	5	3
6	5	4