

SOLUCIONS · SETEMBRE 2024

2*

3

Tenim un rectangle de paper que té el doble de llargada que d'amplada. Talla'l en el mínim nombre de trossos possible per formar un quadrat que ocupe la mateixa superfície que el rectangle.

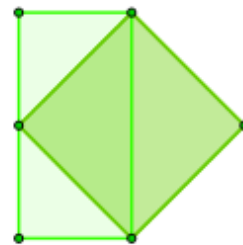
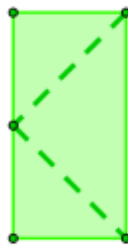
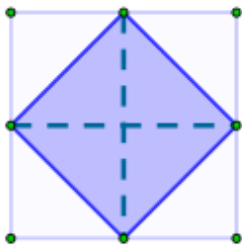


SOLUCIÓ AMB PAPIROFLEXIA:

Com que tenim un costat doble de l'altre, podem considerar que és la meitat d'un quadrat.

El quadrat que volem formar tindrà la meitat de superfície que l'original, que és el que ocupa el nostre rectangle.

Per aconseguir-ho, només cal pensar que, si en el quadrat inicial dobleguem de manera que els quatre vèrtexs s'ajunten al centre del quadrat, el que obtenim ocupa just la meitat que el que teníem (ara tenim dues capes de paper on abans teníem una). Aquests seran els talls que hem de fer:



Amb dos talls n'hi hauria prou.

SOLUCIÓ ANALÍTICA:

Si els costats del rectangle són x i $2x$, la superfície serà $S = x \cdot 2x = 2x^2$.

Si volem un quadrat amb aquesta superfície, podem calcular el que fa un costat: $l = \sqrt{S} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$, que coincideix amb la diagonal d'un quadrat de costat x , que és la meitat del nostre rectangle. El resultat obtingut coincideix amb el de papiroflèxia.

4***

Troba el nombre més gran de set xifres diferents que compleix que és divisible per totes elles.

5



SOLUCIÓ:

De les deu xifres possibles n'hem d'eliminar tres. És clar que una és el zero, ja que el nombre ha de ser divisible per totes les xifres.

També és fàcil descartar el 5, ja que, perquè el nombre sigui divisible per ell, hauria d'acabar en 5 (ja hem descartat el 0), i en aquest cas no seria divisible per les xifres parells.

Falta descartar un altre número. Tenint en compte que hi ha el 3, el 6 i el 9, les xifres han de sumar un múltiple de 3 (o de 9).

Si sumem $S=1+2+3+4+6+7+8+9=40$. Candidats a ser eliminats per obtenir un múltiple de 3:

1	$S - 1 = 39$
4	$S - 4 = 36$
7	$S - 7 = 33$

Com que el 9 no és candidat per ser eliminat, hem d'obtenir una suma múltiple de 9. Només és possible si eliminem el 4.

Aleshores, les xifres que farem servir seran: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9.

El nombre més gran que podem formar amb aquestes xifres és el 9876321, però no és divisible per totes.

Que siga divisible per 1 no cal comprovar-ho.

Si el nombre és divisible per 8, necessàriament ho serà per 2.

Si és divisible per 9, també ho serà per 3.

En ser-ho per 2 i per 3, no necessitem comprovar que ho sigui per 6.

De tot això, podem deduir que si el nostre número és divisible per 7, 8 i 9, ho serà per les set xifres. O, el que és equivalent, si és divisible per $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$, ho serà per totes.

Buscarem el múltiple més gran de set xifres de 504 que complisca que està format per les xifres 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9.

Dividim el nombre més gran amb les set xifres entre 504:

$$9876321:504=19595.875$$

Així que el múltiple més gran possible de 504 serà $504 \cdot 19595 = 9875880$, però no serveix per no tenir les xifres que volem.

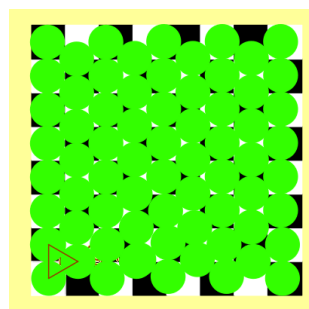
Si anem restant 504 a aquest número, tots els resultats seran múltiples de 504. (Amb la calculadora, un cop feta la primera resta, cada cop que premem el =, torna a restar 504).

En restar 17 vegades, obtenim $9875880 - 17 \cdot 504 = 9867312$, que és el número que buscàvem.

6 ggb

7

Tenim un tauler d'escacs on cada casella té 3 cm de costat, i tantes fitxes de dames com vulguem, totes amb un diàmetre de 3 cm. Quantes podem posar com a màxim sobre el tauler sense que estiguen superposades ni sobrepassen la vora del tauler?



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

És clar que a cada casella es pot posar una fitxa, així que les 64 fitxes estan garantides, però hi ha una altra solució millor.

Si pensem com s'empaqueten coses circulars (o esfèriques, com les taronges), podem veure que queda lloc per posar-hi una línia més.

Per dibuixar el tauler, començarem per un quadrat de costat 3 que després desplaçarem horitzontalment i verticalment fins tenir les 64 caselles del tauler.

Per desplaçar horitzontalment, introduïrem a la barra d'entrada el vector $u=(3,0)$, i per fer-ho verticalment, el $v=(0,3)$.

Una vegada dibuixat el primer quadrat (cantonada inferior esquerra del tauler), amb translació de vector v podem aconseguir la primera columna.

Per a la resta, no cal fer-ho quadrat a quadrat, podem seleccionar amb el botó dret tota la columna i traslladar-la en bloc amb el vector u .

Nota: si vols traslladar blocs majors, és possible, però potser hauràs de definir algun vector nou.

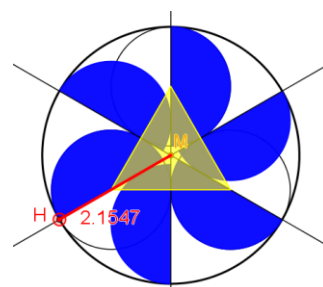
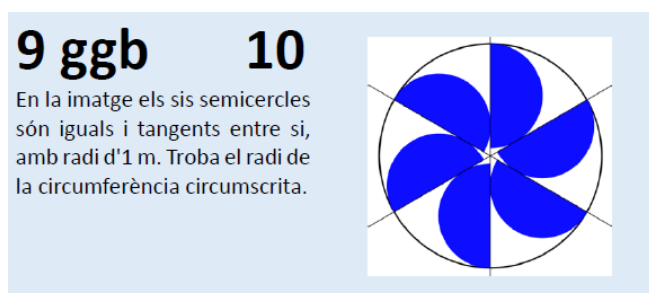
Ara acolorim un quadrat en negre i un altre en blanc. Amb copiar estil visual acolorim la resta.

Les fitxes les posarem de manera similar. La primera amb centre el del quadrat inferior esquerre i radi 1.5. L'acolorim de groc i, a la pestanya d'avançat, seleccionem la capa 2 perquè quede sobre del tauler.

La primera columna de fitxes la podem completar amb desplaçament vertical (amb el vector v que hem fet servir abans).

Per a la segona columna, cal tenir en compte que els vèrtexs de tres fitxes tangents estaran sobre els vèrtexs d'un triangle equilàter de costat 3. Els vectors necessaris per a la translació els podeu col·locar sobre els costats d'un triangle que dibuixarem fora del tauler. També podem traslladar blocs.

A partir d'ací podem completar cinc columnes de 8 fitxes i quatre columnes de 7 fitxes, la qual cosa fa un total de $5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 40 + 28 = 68$ fitxes, quatre més que posant-ne una a cada quadrat.



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

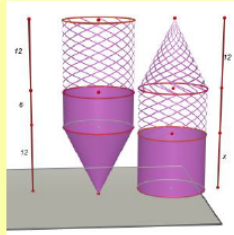
Per començar, és convenient fixar-se que, si girem tres semicircumferències alternes, obtindrem, en lloc de sis semicircumferències, tres circumferències completes iguals i tangents entre si sense que canvie la mida de la circumferència externa. Si unim els centres de les tres obtindrem un triangle equilàter de costat 2 m.

Els passos a seguir seran:

1. Dibuixem un triangle equilàter de costat 2.
2. Trobem els punts mitjans dels costats.
3. Amb centre a cadascun dels vèrtexs i passant pels punts mitjans dels costats dibuixem tres circumferències.
4. Dibuixem les tres altures del triangle.
5. El radi que busquem va del centre del triangle (punt de tall de les altures) al punt de tall d'una de les altures amb la circumferència corresponent.
6. Tracem el segment entre els dos punts. Obtenim que el radi de la circumferència és de 2,1547 m.

11****12**

En la imatge adjunta les dues figures són iguals i contenen el mateix volum d'aigua. El con té una alçada de 12 cm. En la de l'esquerra, l'aigua del cilindre arriba a una alçada de 6 cm dels 18 que té en total. Troba l'altura a la qual arriba l'aigua en la figura de la dreta.

**SOLUCIÓ:**

El volum d'aigua del cos de l'esquerra està format per un con de radi r i altura 12 més un cilindre de radi r i altura 6.

$$V_{aigua} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 12 + \pi r^2 \cdot 6$$

El volum d'aigua del cos de la dreta està format per un cilindre de radi r i altura x

$$V_{aigua} = \pi r^2 \cdot x$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 12 + \pi r^2 \cdot 6 = \pi r^2 \cdot x$$

Simplificant:

$$x = 10 \text{ cm}$$

13*****14**

Es llança un dau tres vegades i amb els números obtinguts formem un número A de 3 xifres (1a tirada les centenes, la 2a les desenes i la 3a les unitats). De la mateixa manera, obtenim un número B. Calcula la probabilitat que $A > B$.

**SOLUCIÓ:**

En ser totes les tirades independents, podem assegurar que la probabilitat que A siga més gran que B és la mateixa que la que el més gran siga B:

$$P(A > B) = P(B > A) = p$$

$$\text{Si anomenem } q = P(A = B), \text{ tindrem que } P(A > B) + P(B > A) + P(A = B) = 2p + q = 1.$$

Per calcular $P(A = B)$ tindrem en compte que A pot ser qualsevol número, mentre que, per a cada tirada amb què formarem B, només una de les sis opcions possibles serà vàlida, d'on $P(A = B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^3}$

$$2p + q = 1 \rightarrow 2p + \frac{1}{6^3} = 1 \rightarrow P(A > B) = p = \frac{1 - \frac{1}{6^3}}{2} = \frac{215}{432}$$

16**



17



El conill i l'eriçó fan una cursa en una pista circular de 550 m. El conill corre a una velocitat constant de 10 m/s i l'eriçó també constant de 1m/s. Comencen alhora des del mateix punt, però cadascú en un sentit. Quan es troben, l'eriçó canvia de sentit i persegueix el conill. Per quants segons guanya el conill?

SOLUCIÓ:

Anomenarem t al temps que tarden en trobar-se (temps en segons).

El conill haurà recorregut $10t$ metres i l'eriçó t metres. Entre tots dos, com van en sentits diferents, han recorregut la pista sencera:

$$10t + t = 550 \rightarrow t = \frac{550}{11} = 50 \text{ segons}$$

En aquest temps, el conill haurà recorregut $10 \cdot 50 = 500$ metres. Els 50 que li falten els recorrerà en 5 segons.

L'eriçó ha recorregut 50 metres. Quan canvie de sentit li quedaran 50 metres, que recorrerà en 50 segons.

Quan l'eriçó arribi a la meta, farà 45 segons que ha arribat el conill.

18*

19

En el número 203700 als dos últims zeros els anomenem zeros terminals. Quants zeros terminals té el resultat del producte $30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 70 \cdot 80$?



SOLUCIÓ:

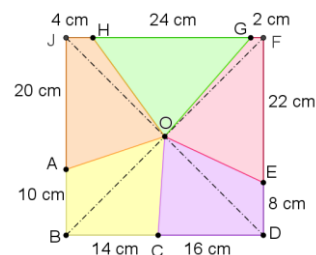
Tindrà 7 zeros terminals. Equival a fer $3 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 10$.

Sis zeros ixen dels deus i l'altre de multiplicar el 5 per algun dels números parells.

20**

21

Parteix un pastís quadrat de 30 cm de costat en 5 trossos igual de grans. Tots els talls han de ser rectes i partir del centre del pastís. El primer va del centre O a un punt A situat a 10 cm d'un dels cantons.



SOLUCIÓ:

Si el pastís té 30 cm de costat, la superfície que hem de tallar en 5 trossos ocupa 900 cm². Cadascun dels trossos ha de ser de $900/5=180$ cm².

El fet que tots els talls siguin rectes i partisquen del centre O, ens indica que qualsevol triangle que tallem des d'O a dos punts de la mateixa vora, tindrà la mateixa superfície si les bases coincideixen.

Traçant les deux diagonales du quadrat tenim quatre triangles que trossejarem perquè cada lot tingui la mateixa base.

Atès que el perímetre del pastís és de $30 \cdot 4 = 120$ cm, si fem cinc racions, cadascuna ha de tenir una base de $120 : 5 = 24$ cm.

Primera ració: amb el tall que indica el problema, tenim el triangle ABO amb 10 cm de base. Falten 14 cm, que els aconseguim amb el triangle BCO.

Segona ració: en tallar els 14 cm, hem deixat un tros amb 16 cm de base (el triangle CDO). Ens falten els 8 cm del triangle DEO.

Tercera ració: el triangle EFO té una base de 22 cm. Ens falten els 2 cm del triangle FGO.

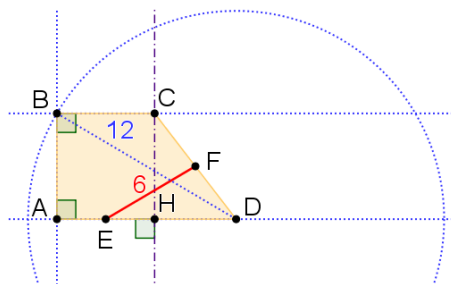
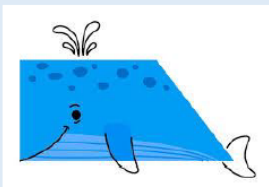
Quarta ració: podem tallar un únic triangle de 24 cm de base, el GHO.

Cinquena ració: l'obtenim amb els 4 cm del triangle HJO i els 20 cm que han quedat al costat del primer tall, el triangle AJO.

23 ggb

24

En un trapezi rectangle ABCD (recte en A i B, amb base major AD) tracem l'altura CH. Es demana la longitud del segment que uneix els punts mitjans d'AH i CD sabent que entre B i D hi ha 12 cm.



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

Per dibuixar el trapezi seguirem els passos següents:

1. Sobre l'eix d'abscisses col·loquem el punt D.
2. Com que B està a una distància de 12 cm de D, tracem una circumferència amb centre en D i radi 12.
3. Col·loquem el punt B sobre la circumferència amb punt en objecte.
4. Tracem des de B la perpendicular a l'eix d'abscisses, i amb intersecció trobem A.
5. Per B tracem una paral·lela a l'eix d'abscisses i sobre ella (amb punt en objecte) col·loquem C.
6. Tracem l'altura a C i trobem H amb la intersecció amb l'eix d'abscisses.
7. Trobem els punts mitjans dels segments entre A i H (E) i entre C i D (F).
8. Unim amb un segment E i F per mesurar la distància que demana el problema.

La longitud és 6. És igual en quina part de la circumferència situem B i en quina part de la recta situem C, la longitud no varia, sempre és 6.

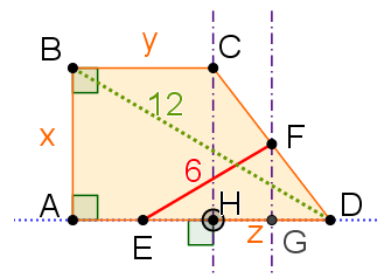
SOLUCIÓ ANALÍTICA (Pitàgores):

En el triangle rectangle ABD es compleix

$$x^2 + (y + z)^2 = 12^2$$

En el triangle rectangle EFG, la hipotenusa és la distància que busquem:

$$\begin{aligned} |EF| &= \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + (y + z)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{12^2} = 6 \end{aligned}$$



SOLUCIÓ ANALÍTICA (Semblança):

Si observem els triangles ABD i EFG, vorem que són semblants:

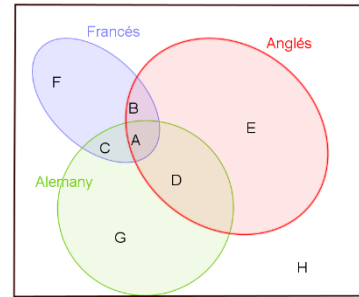
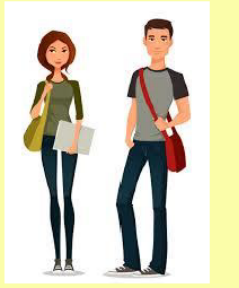
Els angles A i G són rectes.

Els catets d'EFG són la meitat de llargs que els d'ABD, perquè els punts E, F i G són els punts mitjans dels segments que mesuren x, y, z.

Per això la hipotenusa d'EFG també mesura la meitat del que mesura la d'ABD, és a dir, 6 cm.

25****26**

A una acadèmia d'idiomes hi ha 900 alumnes. Se sap que 330 estudien anglès, 280 francès, 270 alemany, 50 anglès i francès, 60 anglès i alemany, 70 francès i alemany i 20 les tres coses. Quants estudien un únic idioma? I cap dels tres?

**Solució:**

Si anem passant al gràfic la informació de què disposem, a A tindrem els que estudien els tres idiomes, és a dir, 20.

$B + A$ són els 50 que estudien anglès i francès, on $B = 30$.

$A + C$ són els 70 de francès i alemany, així que $C = 50$.

$A + D$ són els 60 d'anglès i alemany, d'ací $D = 40$.

$A + B + D + E = 330$ que estudien anglès. Amb els valors que ja tenim: $20 + 30 + 40 + E = 330$, per la qual cosa $E = 240$.

$A + B + C + F = 280$ de francès. De la mateixa manera, $F = 180$.

$A + C + D + G = 270$ d'alemany. Obtenim que $G = 160$.

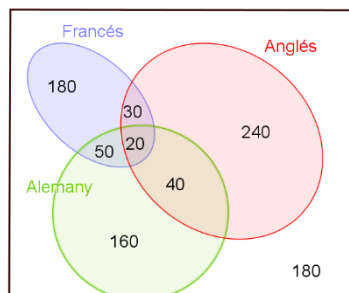
La resposta a quants alumnes estudien un únic idioma l'obtindrem sumant $E + F + G = 180 + 240 + 160 = 580$.

El nombre d'alumnes que no estudia anglès, francès ni alemany l'obtindrem sabent que en total hi ha 900 alumnes:

$$900 - (180 + 30 + 20 + 50 + 160 + 40 + 240) = 180$$

D'una altra manera:

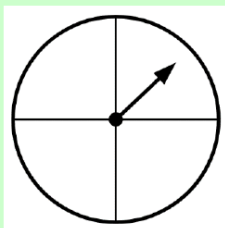
$$900 - (330 + 280 + 270 - 50 - 60 - 70 + 20) = 180$$



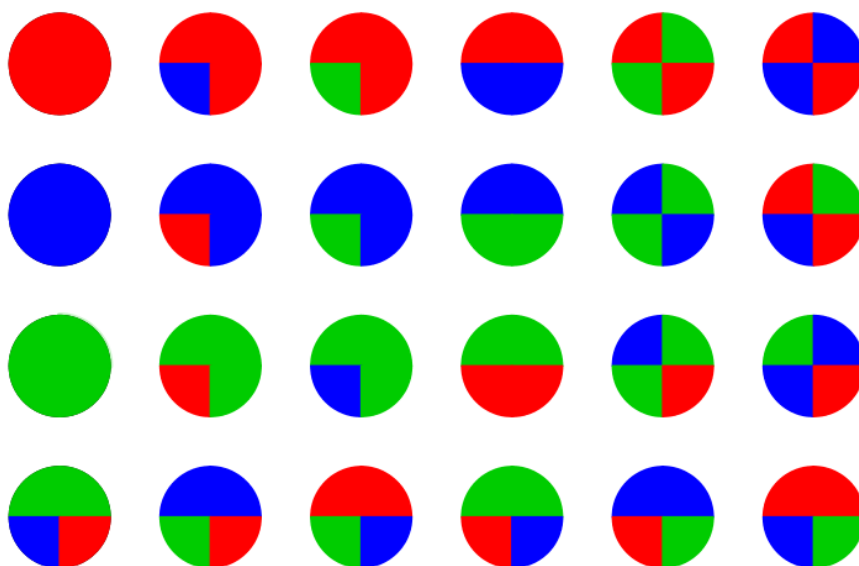
27***28**

Tenim una ruleta partida en quatre sectors iguals, com la imatge. Per pintar-la, disposem de 3 colors: roig, verd i blau. De quantes maneres diferents podem fer-ho?

Nota: no cal utilitzar els tres colors per pintar la ruleta.

**SOLUCIÓ:**

De 24 maneres diferents:



30*

Ompli la taula adjunta amb números naturals d'una xifra, de manera que, en cada fila i en cada columna, el número central siga la mitjana aritmètica dels altres dos.

8		
		3
	5	

SOLUCIÓ:

Para resoldre-ho assignarem lletres als números que busquem:

Como 3 es la mitjana aritmètica de b i f , es compleix:

$$\frac{b+f}{2} = 3 \rightarrow b+f = 6$$

De la mateixa forma es compleix que $e + f = 10$

Si comparem les dues sumes, tenim que $e = b + 4$.

Perquè la mitjana dels dos casos en què apareix el 8 siga un nombre natural, cal que tant b com e siguem nombres parells. Les opcions possibles són:

b	2	4
$e = b + 4$	6	8

Perquè d siga un nombre natural, cal que tant a com c siguem imparells. Si no ho foren, al dividir per 2 per fer la mitjana aritmètica, obtindríem un decimal.

b	2	4
$e = b + 4$	6	8
$a = (8 + b)/2$	5	6
$f = 6 - b$	4	-

Omplim amb la informació que tenim:

8	5	2
7	5	3
6	5	4