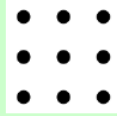


SOLUCIONS · GENER 2025

1*

Sense alçar el llapis del paper, traceu quatre línies rectes que unisquen els 9 punts:

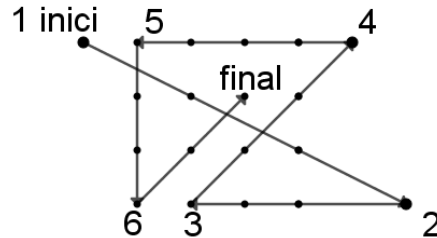
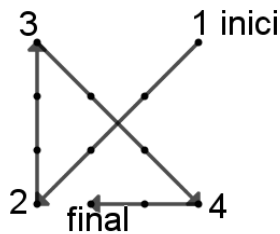


2

Sense alçar el llapis del paper, traceu sis línies rectes que unisquen els 16 punts:



SOLUCIÓ:



3**

Un avi, en una reunió familiar, reparteix tres euros a cada net i li sobren 11 euros. En la celebració familiar següent porta 20 euros més, reparteix 5 a cada net i li sobra un euro. Quants nets té?

4



SOLUCIÓ:

Anomenem: x al nombre de nets

y a la quantitat d'euros que porta el primer dia.

Tindrem les equacions:

$$\begin{cases} y = 3x + 11 \\ y + 20 = 5x + 1 \end{cases}$$

Resolent aquest sistema per substitució:

$$3x + 11 + 20 = 5x + 1$$

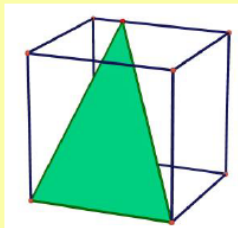
$$31 - 1 = 5x - 3x$$

$$30 = 2x \rightarrow x = 15$$

Per tant, té 15 nets.

6****7**

La figura està formada per un cub i un triangle amb una arista del cub per costat i el tercer vèrtex sobre l'aresta del cub oposada. Calculeu la proporció entre la superfície del cub i l'àrea del triangle.

**SOLUCIÓ:**

Siga el cub $ABCD A' B' C' D'$ d'aresta $\overline{AB} = 1$

Siga $\overline{TP}$ l'altura del triangle $\triangle ABT$

$$\overline{TP} = \overline{BC'} = \sqrt{2}$$

L'àrea del triangle ombrejat és:

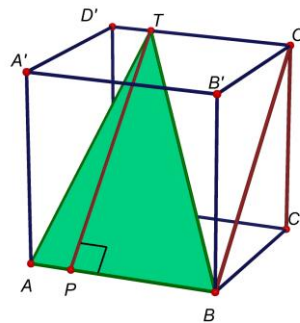
$$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'àrea del cub és:

$$S_{ABCD A' B' C' D'} = 6 \cdot S_{ABCD} = 6$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ABCD A' B' C' D'}}{S_{ABT}} = 6\sqrt{2}$$

**8 ggb****9**

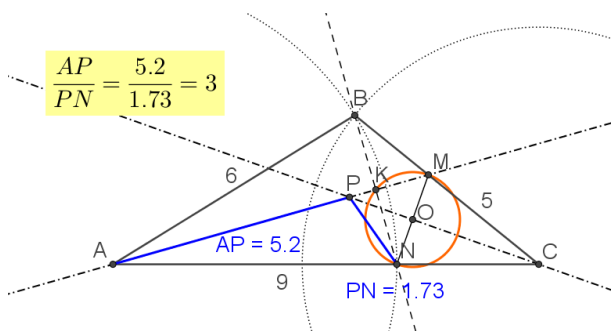
En el triangle ABC ($AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$) es dibuixa la bisectriu de l'angle A . Aquesta recta talla el costat BC en el punt M . La recta perpendicular a AM que passa pel vèrtex B talla el costat AC en el punt N .

a) Proveu que la bisectriu de l'angle C divideix el segment MN per la meitat.

b) Siga P el punt d'intersecció de les bisectrius del triangle ABC . Calculeu la relació entre AP i PN .

SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

1. Comencem per col·locar els punts $A(0,0)$ i $C(9,0)$ sobre l'eix d'abscisses.
2. Amb centre a A i radi 6 tracem una circumferència, i amb centre a C i radi 5 una altra. El punt de tall d'ambdues determina el punt B .
3. Dibueixem la bisectriu del vèrtex a A , i la intersecció d'aquesta amb el costat BC del triangle (l'anomenem M).



4. Tracem la recta perpendicular a aquesta bisectriu que passa pel punt B. Trobem el punt N com a intersecció d'aquesta recta amb el costat AC.
5. Tracem el segment que uneix M amb N i la bisectriu al vèrtex C. Trobem el punt de tall d'ambdós O.
6. Si aquest punt divideix el segment en dues parts iguals, en traçar la circumferència centrada en O que passa per M o N, també passarà per l'altre (N o M). Com es pot comprovar, sí que passa.

Per trobar la relació entre AP i PN, comencem per trobar P com a intersecció de les dues bisectrius.

Tracem els segments i en dividim les longituds. El resultat és 3.

10***

11

Sent $a > 1$, estudeu si la suma següent dona un resultat positiu o negatiu:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}} + \frac{32}{1+a^{32}}$$



SOLUCIÓ:

Sumarem a poc a poc les fraccions:

$$F_1 + F_2 = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} = \frac{1+a+1-a}{(1-a)(1+a)} = \frac{2}{1-a^2}$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = \frac{2}{1-a^2} + \frac{2}{1+a^2} = \frac{4}{1-a^4}$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = \sum_{i=1}^4 F_i = \frac{4}{1-a^4} + \frac{4}{1+a^4} = \frac{8}{1-a^8}$$

$$\sum_{i=1}^5 F_i = \frac{8}{1-a^8} + \frac{8}{1+a^8} = \frac{16}{1-a^{16}}$$

$$\sum_{i=1}^6 F_i = \frac{16}{1-a^{16}} + \frac{16}{1+a^{16}} = \frac{32}{1-a^{32}}$$

$$\sum_{i=1}^7 F_i = \frac{32}{1-a^{32}} + \frac{32}{1+a^{32}} = \frac{64}{1-a^{64}}$$

Com sabem que $a > 1$, podem assegurar que $a^{64} > 1$. Per tant, el resultat final serà negatiu, perquè la fracció $\frac{64}{1-a^{64}}$ té el numerador positiu i el denominador negatiu.

13***14**

Tres amics tenen 21 pots de refresc, 7 d'ells plens, 7 buits i 7 plens fins a la meitat exactament. Com s'han de repartir els pots perquè tots tres s'emportin el mateix nombre de pots i la mateixa quantitat de refresc? (No es pot transvasar refresc d'un pot a un altre).

**SOLUCIÓ:**

En total tenen una quantitat de refresc de 10 pots i mig. Per tant, cadascú s'ha d'emportar 7 pots amb un contingut de 3 pots i mig. Hi ha diverses solucions:

1º) 3 plens, 3 buits, 1 fins a la meitat

2º) 2 plens, 2 buits, 3 fins a la meitat

3º) 2 plens, 2 buits, 3 fins a la meitat

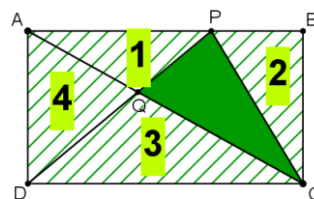
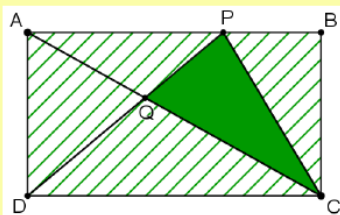
1º) 3 plens, 3 buits, 1 fins a la meitat

2º) 3 plens, 3 buits, 1 fins a la meitat

3º) 1 ple, 1 buit, 5 fins a la meitat

15****16**

En el rectangle adjunt, coneixem que $\overline{AP} = 2\overline{PB}$ i que la superfície del triangle verd CPQ és de 1 dm^2 . Calculeu la superfície que ocupa el rectangle ABCD.

**SOLUCIÓ:**

Per calcular la superfície del rectangle, calcularem la superfície de cadascun dels triangles que el componen.

Els anomenarem amb números, com s'indica al dibuix adjunt.

Com AC és una diagonal del rectangle, sabem que $S_1 + S_2 + 1 = S_3 + S_4$ (1)

Com AP és el doble de PB i com els triangles APC i PBC tenen la mateixa altura BC, la superfície del primer és el doble de la del segon:

$$S_1 + S_4 = 2S_2 \quad (2)$$

També es compleix que els triangles APD i APC ocupen la mateixa superfície perquè tenen la mateixa base i la mateixa altura:

$$S_1 + S_4 = S_1 + 1 \rightarrow S_4 = 1 \quad (3)$$

Els triangles APQ i CDQ són semblants (tenen angles iguals), i, atès que una base és $2/3$ de l'altra, la relació entre les àrees serà:

$$S_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot S_3 = \frac{4}{9} \cdot S_3 \quad (4)$$

Resolem el sistema:

$$\begin{cases} S_1 + S_2 + 1 = S_3 + S_4 \\ S_1 + S_4 = 2S_2 \\ S_4 = 1 \\ S_1 = \frac{4}{9} \cdot S_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S_1 + S_2 = S_3 \\ S_1 + 1 = 2S_2 \\ S_1 = \frac{4}{9} \cdot S_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S_1 + 1 = 2S_2 \\ S_1 = \frac{4}{9} \cdot (S_1 + S_2) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2S_2 - 1 = \frac{4}{9} \cdot (2S_2 - 1 + S_2) \rightarrow 18S_2 - 9 = 12S_2 - 4 \rightarrow 6S_2 = 5 \rightarrow S_2 = \frac{5}{6}$$

$$S_1 + 1 = 2S_2 \rightarrow S_1 = 2S_2 - 1 = \frac{10}{6} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$S_1 + S_2 = S_3 \rightarrow S_3 = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

L'àrea total del rectangle serà:

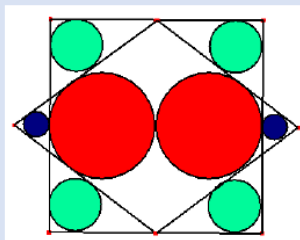
$$S_R = S_1 + S_2 + 1 + S_3 + S_4 = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + 1 + \frac{3}{2} + 1 = 5 \text{ dm}^2$$

17 ggb

18

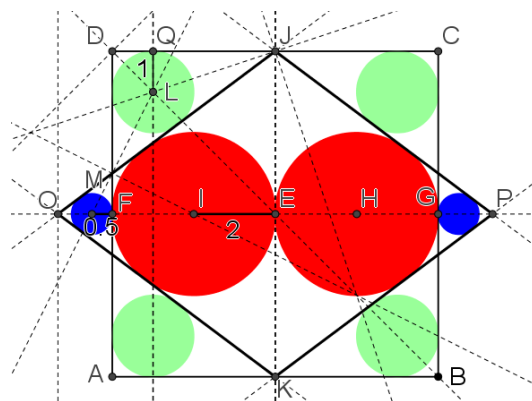
En la imatge adjunta veiem un quadrat, un rombe amb dos vèrtexs en el quadrat i diversos cercles inscrits en els triangles formats.

Calculeu la proporció entre els radis dels tres tipus de cercles.



SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:

1. Comencem per dibuixar el quadrat de costat 8 unitats i vèrtexs ABCD amb polígon regular.
2. A continuació, amb punt mitjà o centre, el centre del quadrat E i els punts mitjans dels costats del quadrat F, G, J i K. També els punts mitjans dels segments FE i EG, que seran els centres de les circumferències grans I i H.
3. Tracem les circumferències grans, de les quals tenim centre i un punt.
4. Els costats del rombe són tangents a aquestes dues circumferències des dels punts mitjans dels costats horitzontals del quadrat (J i K). Tracem les tangents i, amb intersecció, els vèrtexs del rombe. Podem ja traçar el polígon JPKO.
5. Per a les circumferències que falten, en estar inscrites en triangles, necessitem els incentres, que trobarem com a intersecció de dues de les bisectrius del triangle.



L'altre punt que necessitem el trobarem com a intersecció de la recta perpendicular al costat del quadrat corresponent que passe per l'incentre.

6. Dibuixem una de les circumferències mitjanes i amb una rotació de 90° anem obtenint les altres tres.
7. Per a les menudes, el mateix però l'angle de rotació de 180° .
8. Per als radis de les circumferències tracem els segments i en propietats seleccionem que siga visible el valor. Els radis són 2, 1 i 0.5, és a dir, estan en una proporció 4:2:1.

SOLUCIÓ ANALÍTICA:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4r$ i de centre O .

Siga el rombe $KLMN$ tangent a les circumferències de radi r .

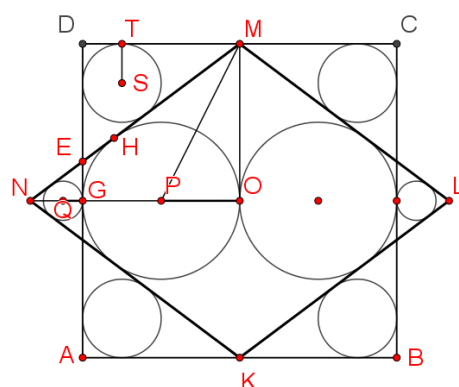
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PO} = r$

Siga $\alpha = \angle PMO$. $\angle NMO = \angle DEM = 2\alpha$

$$\tan \alpha = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\overline{DE} = \frac{3}{2}r, \overline{EM} = \frac{5}{2}r$$



Siga la circumferència de centre S i radi $\overline{ST} = s$ inscrita en el triangle $\triangle DEM$.

$$s = \frac{2r + \frac{3}{2}r - \frac{5}{2}r}{2} = \frac{1}{2}r$$

$$\overline{ON} = \frac{8}{3}r$$

$$\overline{NG} = \frac{2}{3}r, \overline{EF} = r, \overline{NE} = \frac{5}{6}r$$

Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QG} = t$ inscrita en el triangle $\triangle NEF$

L'àrea del triangle $\triangle NEF$ és:

$$\frac{1}{2}r \cdot \frac{5}{6}r = \frac{2 \cdot \frac{5}{6}r + r}{2}t$$

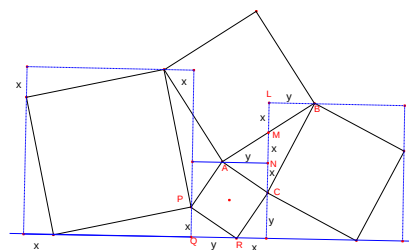
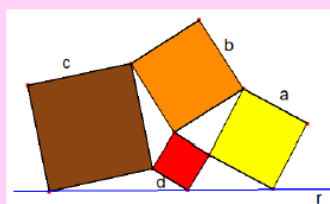
$$t = \frac{1}{4}r$$

Aleshores, la proporció dels radis és:

$$r:s:t = 4:2:1$$

20***

Siguen quatre quadrats de costats a, b, c, d , tals que tres vèrtexs dels quadrats de costats a, c, d estan alineats. Proveu que $b=2d$.

21**SOLUCIÓ:**

Siga el quadrat de costat $\overline{AB} = b$

Siga el quadrat de costat $\overline{AC} = d$

Siga $\overline{PQ} = x, \overline{QR} = y$

$\overline{BL} = \overline{AN} = y$

Aleshores, M és el punt mitjà del costat $\overline{AB}$

Els triangles rectangles $\triangle ANC, \triangle ANM$ són iguals.

Aleshores, $d = \overline{AC} = \overline{AM} = \frac{1}{2}b$

22***23**

Per a una activitat de 2n d'ESO cal organitzar els alumnes en equips menuts. El nombre d'alumnes d'aquest nivell està comprès entre 100 i 120. Si se'ls agrupa de 5 en 5, en sobren 2; si se'ls agrupa de 2 a 2, en sobra 1; però si se'ls agrupa de 3 a 3, no en sobra cap. Quants alumnes hi ha?

**SOLUCIÓ:**

Si en agrupar de 5 en 5 sobren 2, el nombre d'alumnes ha d'acabar en 2 o en 7, ja que, si llevem els dos que sobren, el nombre hauria d'acabar en 0 o 5 per ser múltiple de 5.

Si agrupant de 2 en 2 en sobra un, el nombre ha de ser imparell, així que acaba en 7.

Com agrupant de 3 en 3 no en sobra cap, hem de buscar un múltiple de 3 que acabe en 7 i que estiga entre 100 i 120. Els múltiples de 3 en aquest interval són:

102, 105, 108, 111, 114, **117** i 120.

En total hi ha 117 alumnes.

A vertical number line with numbers 1 through 10 arranged from bottom to top. At the top of the line, above the number 10, is a green frog with large eyes. The numbers are placed inside light blue circles.

Si $a_n = 2 \Rightarrow 2 = 2025 - 3n \Rightarrow n = \frac{2023}{3} \notin \mathbb{N}$

SOLUCIÓ ANALÍTICA:

La funció que ens donarà el benefici obtingut serà la resultant de restar als diners obtinguts per la venda de les x unitats, és a dir, els ingressos per la venda ($I(x) = x \cdot p(x)$), el cost de produir-les:

$$\begin{aligned} B(x) &= I(x) - C(x) = \\ &= x(400 - 0.1x) - \left(1000 + 300x - \frac{x^2}{20}\right) = -\frac{x^2}{20} + 100x - 1000 \end{aligned}$$

Derivem i igualem a zero:

$$B'(x) = -\frac{x}{10} + 100 = 0 \rightarrow x = 1000$$

Comprovem que és màxim amb la segona derivada:

$$B''(x) = -\frac{1}{10} < 0 \rightarrow \text{és màxim.}$$

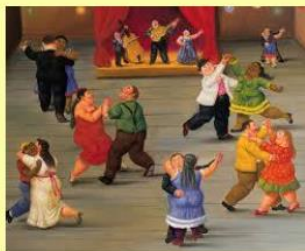
Caldrà fabricar 1 000 unitats del producte.

29**

30

En un concurs de parelles de ball mixtes, el 80% dels homes estan ballant, i el 10% de les dones no estan ballant.

Si han assistit al concurs 340 persones, quantes estan ballant en aquest moment?



SOLUCIÓ:

Anomenarem H el nombre total d'homes que assisteixen al concurs, i M el de dones.

Si no estan ballant el 10% de les dones, vol dir que el 90% sí que ho fan.

Les parelles que ballen en aquest moment estan formades pel 80% dels homes i el 90% de les dones, per la qual cosa les dues quantitats han de coincidir (totes les parelles de ball estan formades per un home i una dona):

$$90\% \text{ de } M = 80\% \text{ de } H \rightarrow 9M = 8H$$

A més sabem que en total són 340 persones, per la qual cosa $M + H = 340$.

Resolem el sistema

$$\begin{cases} 9M = 8H \\ M + H = 340 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9M - 8H = 0 \\ 8M + 8H = 2720 \end{cases} \rightarrow 17M = 2720 \rightarrow M = 160$$

$$M + H = 340 \rightarrow H = 180$$

En aquest moment les dones que ballen són el 90% de 160 i els homes que ballen el 80% de 180, és a dir, 144 dones i 144 homes. Per tant, estan ballant 288 persones.

31*

Un caçador ix d'una cabanya i camina 3 km cap al sud. Després, 2 km cap a l'est, i es troba amb un os. Espantat, corre 3 km cap al nord i arriba a la cabanya de la qual havia partit.
De quin color és l'os?



SOLUCIÓ:

L'ós és blanc. El caçador és al Pol Nord o molt a prop d'ell. És l'única manera de poder tornar al punt de partida.