PROBLEMAS DE JUNIO RESUELTOS

2* **3**

Escribe, ordenados de menor a mayor todos los números de seis cifras que se pueden formar con las cifras 1, 2, 2, 3, 3, 3.

Solución:

122333	123233	123323	123332			4
132233	132323	132332				3
133223	133232	133322				3
212333	213233	213323	213332			4
221333	223133	223313	223331			4
231233	231323	231332				3
232133	232313	232331				3
233123	233132	233213	233231	233312	233321	6
312233	312323	312332				3
313223	313232	313322				3
321233	321323	321332				3
322133	322313	322331				3
323123	323132	323213	323231	323312	323321	6
331223	331232	331322				3
332123	332132	332213	332231	332312	332321	6
333122	333212	333221				3
					Total	60

4***

5

Un día me fui de compras con aproximadamente 15 euros distribuidos en monedas de 1 euro y de 20 céntimos. Al volver tenía la misma cantidad de monedas de 1 euro que la que tenía de 20 céntimos al principio y viceversa. Pero sólo me quedaba un tercio del dinero con el que salí. ¿Cuánto me gasté exactamente?

Solución:

Supongamos que me fui de compras con a monedas de 1 euro y b de 20 céntimos. Llevaba pues en total $(100a + 20b)$ céntimos. Luego al volver tenía b monedas de 1 euro y a de 20 céntimos; o sea, $(100b + 20a)$ céntimos en total.

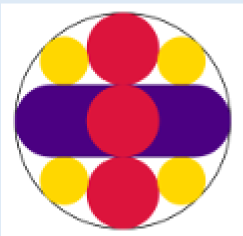
Como la primera cantidad es el triple que la segunda resulta $3\cdot(100b + 20a)= 100a + 20b$. Simplificando obtenemos que $a=7b$.

Estudiemos ahora las distintas posibilidades, sabiendo que a y b son números naturales: si $b=1$ entonces $a=7$, y habría salido con 7,20 euros que NO se aproxima a 15; para $b=3$ resulta $a=21$ y serían 21,60 euros, también alejado de 15. Por lo tanto los únicos valores que cumplen el enunciado son $b=2$ y $a=14$ lo que nos da un valor total inicial de 14,40 euros que significa que nos hemos gastado exactamente **9 euros y 60 céntimos.**

6 ggb

7

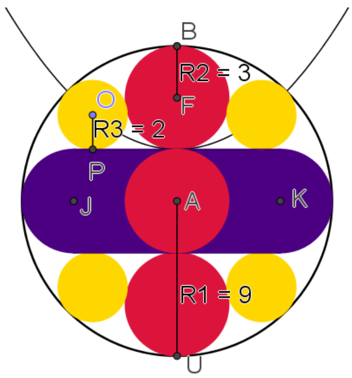
En la figura adjunta hay ocho círculos. Calcula la relación entre los tres tipos de radios.



Solución con geogebra:

Pasos a seguir:

1. Empezamos por dibujar las tres circunferencias rojas. La central con centro en A(0,0) y radio 3.
2. La grande externa está centrada también en A, pero con radio triple que el de la roja, es decir, radio 9.
3. La pieza azul resulta de dibujar las tres circunferencias tangentes sobre el eje de ordenadas centradas en A, J y K. Después, la recta tangente a las tres, tanto por arriba como por abajo.



Para que se vea tal y como está en el dibujo, la circunferencia central roja la colocamos en una capa superior en la pestaña de *avanzado*. Trazamos un rectángulo y coloreamos tanto el rectángulo como las dos circunferencias externas en azul.

4. Para las amarillas, tenemos en cuenta que son tangentes a una recta y a una roja, por lo que su centro está en la parábola con centro en el punto F, centro de la circunferencia, y vértice en el punto de contacto de la circunferencia roja y la recta. La directriz de la parábola coincidirá con el eje de abscisas. La dibujamos.
5. Marcamos un punto sobre la parábola y hacemos la perpendicular a la horizontal por el mismo y hallamos el punto de intersección de las dos rectas. Con estos dos puntos, trazamos la circunferencia. Basta desplazar el centro de la circunferencia hasta que sea tangente a la circunferencia exterior.

Los radios son 9, 3 y 2. La relación será 9:3:2.

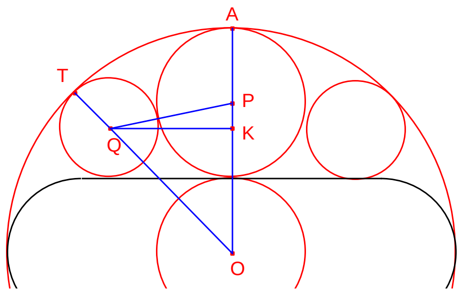
Solución analítica:

Sean $\overline{OA} = R, \overline{PA} = r, \overline{QT} = s$ los radios de los tres tipos de circunferencia.

$R = 3r$

$\overline{PQ} = r + s, \qquad \overline{OQ} = 3r - s,$

$\overline{OK} = r + s, \qquad \overline{KP} = r - s$



Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{QKP}, \overset{\Delta}{QKO}$:

$$(r+s)^2 - (r-s)^2 = \overline{KQ} = (3r-s)^2 - (r-s)^2$$

$$r^2 + 2rs + s^2 - (r^2 - 2rs + s^2) = 9r^2 - 6rs + s^2 - (r^2 - 2rs + s^2)$$

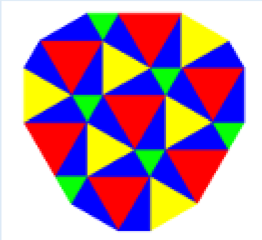
$$8r^2 - 12rs = 0 \quad \rightarrow \quad s = \frac{8r^2}{12r} = \frac{2r}{3}$$

$$r = \frac{3}{2}s$$

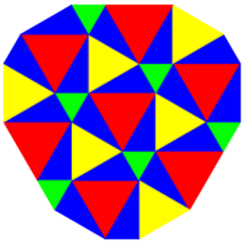
$$R : r : s = 9 : 3 : 2$$

9 ggb 10

La figura adjunta está descompuesta en triángulos rectángulos con hipotenusa de 4 cm y un ángulo de 60º y triángulos equiláteros. Halla el perímetro y la superficie total del dibujo.



Solución:



Lado rojo=4
Lado amarillo=3.46
Lado verde=2

Perímetro=
=3·lado rojo+6·lado amarillo+6·lado verde=
=3·4+6·3.46+6·2=44.78

Área=152.42

Para hallar el área haremos el dibujo y después dibujaremos el polígono externo. En la vista algebraica tendremos el valor del área como polígono20=152.42.

Para el perímetro, tendremos en cuenta que el lado de los triángulos rojos coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo, el de los amarillos con el cateto mayor y el de los verdes con el cateto menor.

Pasos para hacer el dibujo:

1. Dibujamos un segmento de longitud 4 que será la hipotenusa. Lo más fácil, que vaya desde A(0,0) hasta B(4,0).
2. Desde uno de los vértices dibujamos el ángulo de 60º. La perpendicular a la recta que determina el ángulo y que pasa por el otro vértice nos da el vértice que falta, el del ángulo recto. Ya podemos dibujar el triángulo rectángulo.
3. Desde cada uno de los lados, con polígono regular dibujamos los tres equiláteros que lo rodean.
4. Rotando 60º el triángulo equilátero alrededor del centro de cualquiera de los equiláteros podemos conseguir los que lo rodean.
5. Siguiendo el mismo proceso completamos el dibujo.
6. Para la superficie dibujamos el polígono que rodea la imagen.
7. Para el perímetro, basta tomar de la vista algebraica la longitud de cada segmento y sumar.

11** **12**

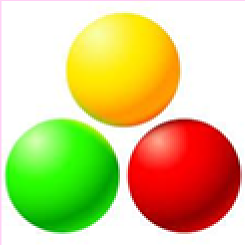
Encontrar el número natural más pequeño que se pueda representar con la suma de cinco números naturales diferentes que cumplan que la suma de las cifras de los cinco da el mismo resultado. (Ej.: en 241 y 106, la suma de las cifras es 7).

Solución:

1. La suma de las cifras es 1. Por lo que los únicos números posibles son del tipo de la unidad seguida de ceros.
   1+10+100+1000+10000=11111
2. La suma de las cifras es 2. Podemos tener un dos y ceros o dos unos y ceros. Los menores posibles son:
   2+11+20+101+110=244
3. La suma de las cifras es 3. Podremos tener un tres y ceros, un dos, un uno y ceros o tres unos y ceros:
   3+12+21+30+102=168
4. La suma de las cifras es 4:
   4+13+22+31+40=110
5. La suma de las cifras es 5:
   5+14+23+32+41=115
6. La suma de las cifras es 6:
   6+15+24+33+42=120
7. La suma de las cifras es 7:
   7+16+25+34+43=125
   Es fácil ver que cada vez la suma será mayor. Por lo tanto, la menor suma que podremos obtener será el 110.

13* 14**

En una bolsa hay 100 canicas de tres colores: amarillo, rojo y verde. Sabemos que: A) hay más verdes que el doble de amarillas. B) el triple de las amarillas es mayor que el cuádruple de las rojas. C) El triple de las rojas es mayor que el número de verdes. ¿Cuántas hay de cada color?



Solución:

Llamaremos A al número de bolas amarillas, R al de rojas y V al de verdes.

1) Sabemos que se cumple

$$\begin{cases} A + R + V = 100 \\ V > 2A \end{cases} \rightarrow \; A + R + 2A < 100 \;\rightarrow\; 3A + R < 100$$

Como $3A > 4R$ podemos deducir que $4R + R < 100 \;\rightarrow\; 5R < 100 \;\rightarrow\; R < 20$

2) De la misma forma,

$$\begin{cases} A + R + V = 100 \\ V < 3R \end{cases} \rightarrow \; A + R + 3R > 100 \;\rightarrow\; A + 4R > 100$$

Aplicando ahora que $3A > 4R$

Obtenemos que $A + 3A > 100 \;\rightarrow\; 4A > 100 \;\rightarrow\; A > 25$

3) De $V > 2A$ deducimos que $V > 50$

Si tomamos los primeros valores posibles para R y A: R=19 , A=26, tendremos que el valor de V debe ser 55.

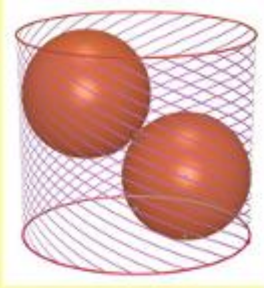
Comprobando todas las condiciones, vemos que se cumplen todas:

$$V = 55 > 2A = 2 \cdot 26 = 52$$
$$3A = 3 \cdot 26 = 78 > 4R = 4 \cdot 19 = 76$$
$$3R = 3 \cdot 19 = 57 > V = 55$$

La solución es pues que hay 19 rojas, 26 amarillas y 55 verdes.

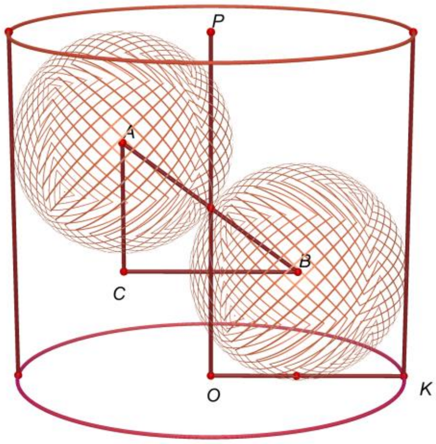
16** 17

La figura está formada por un cilindro de radio 4.5 cm y dos esferas iguales de radio 2.5 cm que caben justas en el cilindro.
Calcula el volumen que hay entre el cilindro y las esferas.



Solución:

Llamamos R al radio del cilindro y r al de una esfera.



$R = \overline{OK} = \dfrac{9}{2}, \overline{AB} = 2r = 2 \cdot 2.5 = 5,$

$\overline{BC} = 2 \cdot R - 2 \cdot r = 9 - 5 = 4$

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$

$\overline{OP} = 2r + \overline{AC} = 5 + 3 = 8$

El volumen del cilindro es:

$V_{cilindro} = \pi \cdot \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 \cdot 8 = 162\pi$

El volumen de una esfera es:

$V_{esfera} = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{5}{2}\right)^3 = \dfrac{125}{6}\pi$

El volumen que buscamos es:

$V = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{esfera} = \dfrac{361}{3}\pi$

18* **19**

Un juego consiste en sacar bolas de una en una y al azar de una caja que contiene bolas blancas y rojas. Para ganar hay que sacar dos bolas rojas consecutivas o sacar dos blancas sin importar el orden. ¿De cuántas formas distintas se puede ganar?

Solución:

Hay siete formas de ganar:

1. **B B**
2. B **R R**
3. **B** R **B**
4. **R R**
5. R **B B**
6. R B **R R**
7. R **B** R **B**

20** **21**

Si la media aritmética de quince números naturales distintos es 13, ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar el segundo número más grande de estos quince naturales?

Solución:

Sabemos que $\bar{x}_{15} = \frac{S_{15}}{15} = 13.$

Por lo tanto, la suma de los 15 números es $S_{15} = 13 \cdot 15 = 195.$

Si los ordenamos de menor a mayor y sabiendo que los quince números son distintos, la forma de conseguir que los últimos sean más grandes es reducir todo lo posible los trece primeros, es decir, que sean los naturales del 1 al 13.

Si los sumamos obtendremos $S_{13} = \frac{13}{2} \cdot (1 + 13) = 91.$

Si restamos $S_{15} - S_{13} = 195 - 91 = 104$ es lo que sumarán los dos mayores. Al ser un resultado par, los dos números deben tener la misma paridad, y para conseguir que el penúltimo sea lo más grande posible, el último debe ser dos unidades mayor.

De todo esto deducimos que los números son 51 y 53.

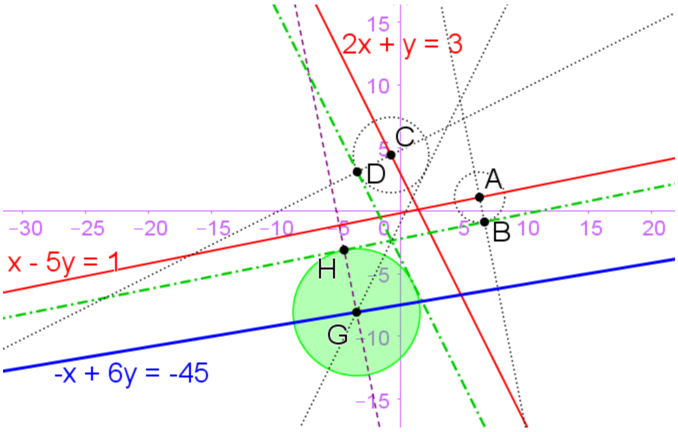
El mayor valor que puede tomar el segundo más grande será 51.

23 ggb

Construye una circunferencia cuyo centro pertenezca a la recta $x - 6y = 45$, y cuya distancia mínima a la recta x-5y=1 es de 2 unidades y a la recta 2x+y=3 es de 3 unidades.

24

Solución:



Pasos a seguir:

1. Lo primero es introducir las tres rectas (en la barra de entrada). Para distinguirlas, en azul la que contiene el centro de la circunferencia buscada y en rojo las otras dos.

   La circunferencia será tangente a una paralela a cada una de las dos rectas que se encuentre a la distancia indicada: 2 unidades para $x - 5y = 1$ y 3 unidades para $2x + y = 3$.
2. Marcamos un punto cualquiera A sobre la recta $x - 5y = 1$.
   Dibujamos una circunferencia centrada en A con radio 2.
   Trazamos la perpendicular a $x - 5y = 1$ por A y el punto B en el que corta a la circunferencia pertenecerá a la recta paralela a $x - 5y = 1$ que buscamos.
   Trazamos la paralela a $x - 5y = 1$ por B. La coloreamos en verde.
3. Actuamos de la misma forma con la recta $2x + y = 3$. Los puntos ahora son C y D y la circunferencia tiene radio 3.
   Trazamos la recta paralela a $2x + y = 3$ por D y la coloreamos con verde.

   La circunferencia que buscamos debe ser tangente a las dos rectas verdes, por lo que su centro debe estar en la bisectriz del ángulo de corte de ambas. La trazamos.

4. El centro de la circunferencia debe estar tanto en la bisectriz como en la recta $x - 6y = 45$, es decir, estará en el punto G de intersección de ambas.
5. Para hallar un punto de la circunferencia H, basta trazar la perpendicular por G a una de las dos rectas verdes y hallar la intersección.
6. Ya podemos dibujarla.

25** **26**

Se sabe que la altura, el largo y el ancho de un prisma de base rectangular son tres números naturales consecutivos.
Su volumen es 15600 u^3.
Halla el área total de la superficie del prisma.

Solución:

Por tener dimensiones tan parecidas el prisma es prácticamente un cubo. Teniendo en cuenta que

$\sqrt[3]{15600} \approx 24{,}99 \ldots$ obtenemos fácilmente que sus dimensiones son

$24 \cdot 25 \cdot 26 = 15600$ u^3.

Luego el área total de su superficie es $2 \cdot (24 \cdot 25 + 25 \cdot 26 + 24 \cdot 26) =$ **3748 u^2.**

27* **28**

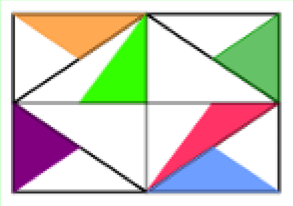
Anteayer Carla tenía 15 años, y el año que viene cumplirá 18. ¿Qué día es hoy?

Solución:

Anteayer	Ayer	Hoy	Este año	Próximo año
15 años	16 años	16 años	17 años	18 años
30 diciembre	31 diciembre	1 enero	31 diciembre	31 diciembre
	Su cumpleaños		Su cumpleaños	Su cumpleaños

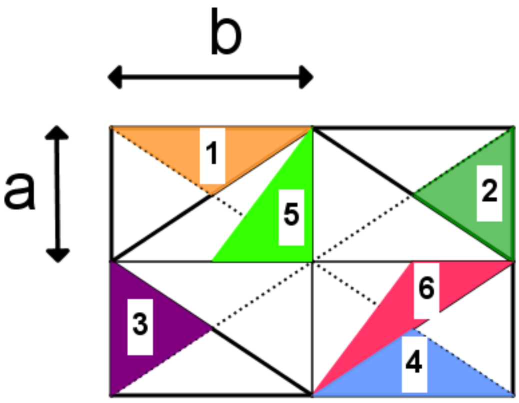
30*

En el rectángulo de la imagen hay varios triángulos coloreados. Ordénalos de menor a mayor superficie. ¿Qué porcentaje del rectángulo está coloreado?



Solución:

Todos los triángulos coloreados ocupan la misma superficie.



$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{a}{2} = \frac{ab}{4}$$
$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{b}{2} = \frac{ab}{4}$$
$$S_3 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{b}{2} = \frac{ab}{4}$$
$$S_4 = \frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{a}{2} = \frac{ab}{4}$$
$$S_5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot a = \frac{ab}{4}$$
$$S_6 = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot a = \frac{ab}{4}$$

Si trazamos las dos diagonales del rectángulo, junto con los lados del rombo interior, vemos que queda dividido en 16 triángulos de la misma superficie. En total tenemos 6 coloreados, por lo que el porcentaje pedido es $P = \frac{6}{16} = 0.375 = 37.5\%$.