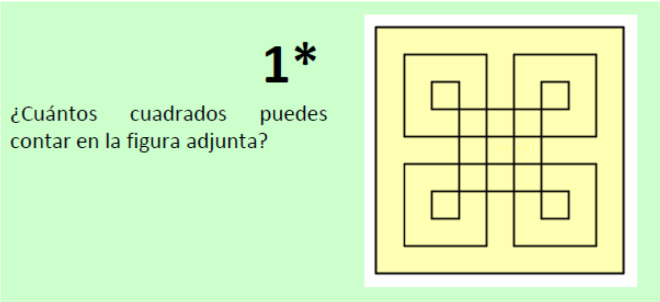
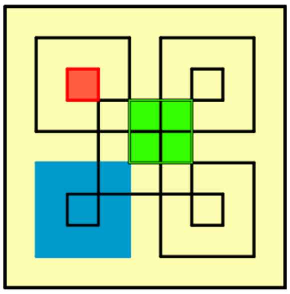
SOLUCIONES – NOVIEMBRE 2025





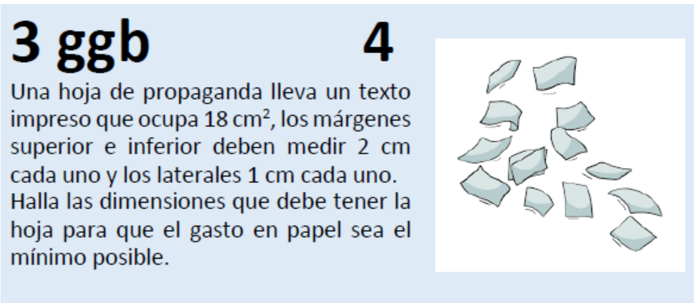
Solución:

Hay cuatro tamaños de cuadrado: el grande que rodea todo el dibujo y los tres coloreados en la imagen.

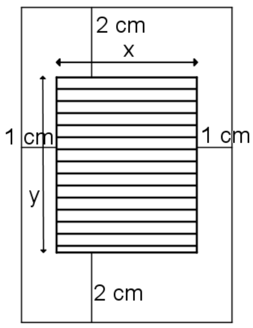
Contamos por tamaño:

Grande: 1
Azul: 5
Verde: 4
Naranja: 13

En total: 1+5+4+13=23 cuadrados.



Solución:

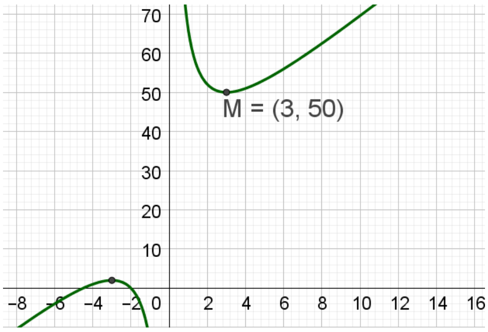


Con los datos que tenemos en el dibujo adjunto, la superficie escrita cumplirá $x \cdot y = 18 \ \rightarrow \ y = \frac{18}{x}$
La función que nos dará la superficie de la hoja será

$$S(x, y) = (x + 2)(y + 4) \quad \rightarrow \quad S(x) = (x + 2)\left(\frac{18}{x} + 4\right)$$

Buscamos los valores de x e y para los que alcance el mínimo. Introducimos en la barra de entrada la función S(x) y buscamos los extremos de la misma:

Obtenemos que la superficie mínima se obtiene cuando x=3, y es de 50 cm^2.
La hoja medirá:
$x + 2 = 5$ cm de base
$y + 4 = \frac{18}{x} + 4 = \frac{18}{3} + 4 = 10$ cm de altura.
El texto impreso sería de 3 cm x 6 cm.



5** **6**

Iñaki tiene pesas de 4, 5, 6, 7, ..., 2017 gramos.
a) ¿Puede Iñaki equilibrar la balanza de dos platos utilizando todas las pesas a la vez?
b) ¿Puede Iñaki equilibrar la balanza utilizando todas las pesas que tendrá cuando Ana le dé una pesa de 1 gramo?

Solución:

a) La suma inicial de las 2014 pesas que tiene Iñaki es:

$4 + 5 + 6 + \ldots + 2017 = (4 + 2017) \cdot \frac{2014}{2} = 2\,035\,147$ gramos, que es una cantidad impar. Por lo tanto, las pesas de Iñaki no se pueden colocar en la balanza de forma que los dos platos estén equilibrados.

b) Tenemos un total de 2014+1=2015 pesas. Es impar, por lo que no se pueden dividir en parejas. Entonces, dejando de lado las pesas de 1, 4 y 5 gramos, emparejamos las pesas restantes con el mismo peso total:
(2017;6), (2016;7), ..., (1012;1011)

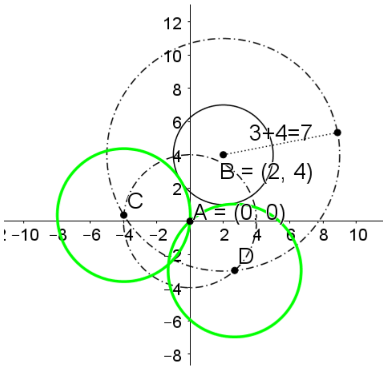
Son $\frac{2015-3}{2} = 1006$ parejas. Podemos colocar la mitad, 503 parejas en cada plato. En este momento la balanza está equilibrada. Falta colocar las pesas de 1, 4 y 5 gramos. Ponemos en un lado las de 1 y 4 gramos, y en el otro la de 5 gramos.

7 ggb 8

Halla todas las circunferencias de radio 4 que pasan por $A(0,0)$ y son tangentes a la circunferencia de radio 3 centrada en $B(2,4)$.

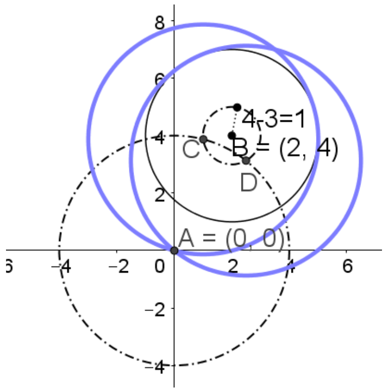
Solución con geogebra:

1ª parte: con la circunferencia centrada en B(2,4) externa a las que buscamos:



1. Si las circunferencias que buscamos deben tener 4 unidades de radio y pasar por $A(0,0)$, sus centros deben estar en la circunferencia centrada en A y con radio 4. La trazamos.
2. Trazamos la circunferencia con centro en $B(2,4)$ y radio 3.
3. Para que las circunferencias que buscamos sean tangentes a esta, sus centros deben estar a una distancia de 3+4=7 unidades de B. Trazamos la circunferencia de radio 7 con centro en B.
4. Hallamos la intersección de estas dos circunferencias y obtenemos los puntos C y D que serán los centros de las circunferencias que buscamos. Las trazamos con radio 4 y centros C y D, respectivamente.

2ª parte: con la circunferencia centrada en B(2,4) interna a las que buscamos:



5. Si las circunferencias que buscamos deben tener 4 unidades de radio y pasar por $A(0,0)$, sus centros deben estar en la circunferencia centrada en A y con radio 4. La trazamos.
6. Trazamos la circunferencia con centro en $B(2,4)$ y radio 3.
7. Para que las circunferencias que buscamos sean tangentes a esta, sus centros deben estar a una distancia de 4-3=1 unidades de B. Trazamos la circunferencia de radio 1 con centro en B.
8. Hallamos la intersección de estas dos circunferencias y obtenemos los puntos C y D que serán los centros de las circunferencias que buscamos. Las trazamos con radio 4 y centros C y D, respectivamente.

10** **11**

Salma escribió 2026 números enteros en la pizarra. Claudia se dio cuenta que la suma de cualquier grupo de 2025 números de estos siempre es par. La suma de todos los números ¿es par o impar?

Solución:

Vamos a razonar que todos los números que se han escrito en la pizarra han de ser pares necesariamente.

Supongamos que alguno de ellos (llamémosle N) fuera impar. La suma de los 2025 restantes, según el enunciado, es una cantidad par. Entre estos 2025 números ha de haber algún número par, ya que, si los 2025 números fueran todos impares, la suma obtenida sería una cantidad impar. Llamemos M a este número par.

Si sustituimos el número M (que es par) por el número N (que es impar), el resultado de la suma de estos 2025 números cambiaría de paridad, y ahora sería impar, lo que contradice la condición del enunciado de que la suma de cualquier grupo de 2025 números siempre es par.

En definitiva, todos los números han de ser pares necesariamente, por lo que la suma de todos los números ha de ser par.

12* **13**

Sara ha dibujado cuatro cifras en cartulinas distintas para formar el número 2025.
¿Cuántos números estrictamente mayores que 2025 puede formar con esas cuatro cifras?

Solución:

En total puede formar 8 números:

2052, 2205, 2250, 2502, 2520, 5022, 5202, 5220

14* 15**

Tenemos dos cubos cuyas aristas miden cantidades enteras. Además, el volumen conjunto es igual a la longitud conjunta de todas las aristas.

¿Cuánto mide la arista de cada cubo?

Solución:

Llamaremos x e y a las longitudes de las aristas de los dos cubos.

Se cumple que $x^3 + y^3 = 12x + 12y \quad \rightarrow \quad x^3 + y^3 = 12(x + y)$

También

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \quad \rightarrow \quad x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2$$

De las dos igualdades

$$(x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 12(x + y) \quad \rightarrow \quad (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 12(x + y)$$

Como es imposible que $x + y = 0$, podemos afirmar que

$$(x + y)^2 - 3xy = 12 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2xy + y^2 - 3xy - 12 = 0 \quad \rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - xy - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - xy - 12 - xy = 0 - xy \quad \rightarrow$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 12 - xy \quad \rightarrow \quad (x - y)^2 = 12 - xy$$

Al ser $(x - y)^2$ un cuadrado, podemos asegurar que no será negativa la expresión $12 - xy \quad \rightarrow \quad 12 \geq xy$

Sabemos por el enunciado que tanto x como y son enteros. Analicemos las opciones posibles:

x, y	$x \cdot y$	$x^3 + y^3$	$x^3 + y^3$ debe ser par	$12(x + y)$	
12,1	12	1728+1=1729	N		
6,2	12	216+8=224		12·8=96	N
4,3	12	64+27=91	N		
11,1	11	1331+1=1332		12·12=144	N
10,1	10	1000+1=1001	N		
5,2	10	125+8=133	N		
9,1	9	729+1=730		12·10=120	N
3,3	9	27+27=54		12·6=72	N
8,1	8	512+1=513	N		
4,2	8	64+8=72		12·6=72	S
7,1	7	343+1=344		12·8=96	N
6,1	6	216+1=217	N		
3,2	6	27+8=35	N		
5,1	5	125+1=126		12·6=72	N
4,1	4	64+1=65	N		
2,2	4	8+8=16		12·4=48	N
3,1	3	27+1=28		12·4=48	N
2,1	2	8+1=9	N		
1,1	1	1+1=2		12·2=24	N

La única opción posible es que el cubo pequeño tenga una arista de 2 unidades y el grande de 4.

17* 18

Divide el rectángulo en cuatro partes de manera que las sumas de los números contenidos en ellas sean iguales.

8	6	5	10	12
9	10	3	4	3
1	5	2	1	4
9	3	11	2	8

Solución:

Para saber cuánto deben sumar los números de cada uno de los cuatro trozos, sumamos todos los de la tabla y dividimos por 4:

Suma=116

116:4=29 es lo que deben sumar todos los números de cada trozo.

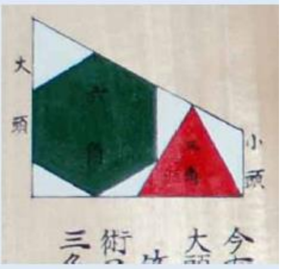
8	6	5	10	12
9	10	3	4	3
1	5	2	1	4
9	3	11	2	8

19 ggb 20

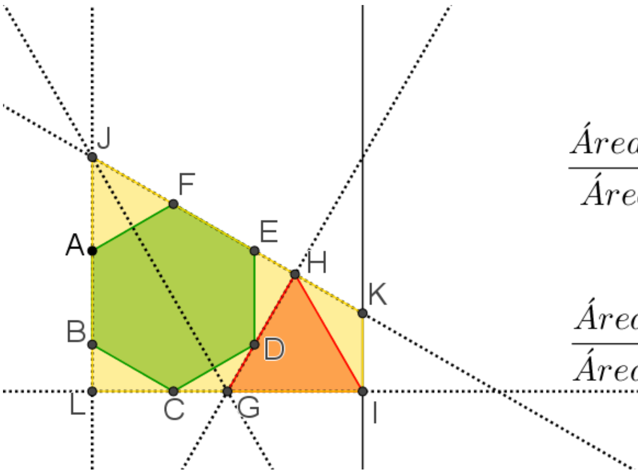
La figura está formada por un trapecio rectangular que contiene un hexágono regular y un triángulo equilátero.

a) Calcula la proporción entre las áreas del triángulo equilátero y el trapecio.

b) Calcula la proporción entre las áreas del triángulo equilátero y el hexágono regular.



Solución con geogebra:



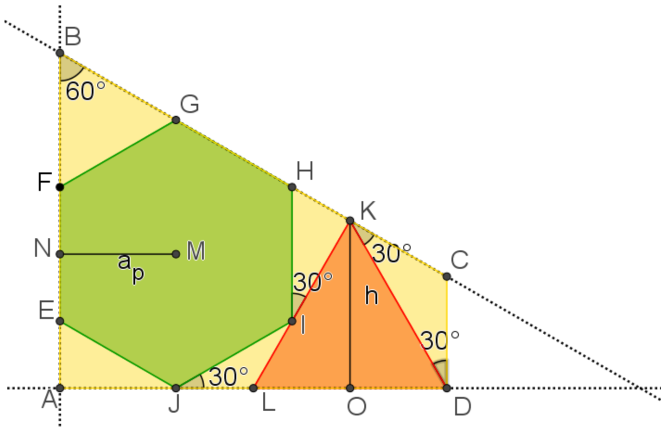
$$\frac{Área\ triángulo}{Área\ trapecio} = \frac{0.90211}{4.81125} = 0.1875$$

$$\frac{Área\ triángulo}{Área\ hexágono} = \frac{0.90211}{2.59808} = 0.34722$$

1. Empezamos por dibujar el hexágono con polígono regular y los puntos $A(0,1)$ y $B(0,0)$.

2. Trazamos las rectas por los lados AB y EF, que coinciden con dos de los lados del trapecio y la perpendicular por C a la recta por A y B, que será la base.
3. Dibujamos la mediatriz del lado CD del hexágono. El punto G de corte con la recta de la base será el vértice izquierdo de la base del triángulo.
4. Al ser equilátero, sus ángulos miden todos 60°. Trazamos un ángulo de 60° con vértice en G y sentido antihorario. El punto H de corte con la recta por E y F será otro vértice del triángulo. Ya podemos dibujarlo con polígono regular.
5. La perpendicular a la base por el vértice I del triángulo nos dará el lado que faltaba del trapecio. Ya podemos dibujarlo con polígono y obtener su superficie.
6. Las áreas del triángulo y el hexágono ya las teníamos en la vista algebraica. Sólo falta hacer las divisiones.

Solución analítica:



Llamaremos a al lado del triángulo y b al del hexágono.

<u>**ÁREA DEL TRIÁNGULO**</u>

La altura será $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

El área del triángulo $A_{LDK} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

<u>**ÁREA DEL HEXÁGONO**</u>

La apotema será $a_p = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}b$

El área del hexágono $A_{hex} = \frac{P \cdot a_p}{2} = \frac{6b}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2$

<u>**ÁREA DEL TRAPECIO**</u>

$$A_{ABCD} = \frac{\overline{AD} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD})}{2}$$

Calculamos las tres longitudes que necesitamos:

1) $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FB} = \frac{b}{2} + b + b = \frac{5b}{2}$

2) Para calcular $\overline{CD}$ usaremos el triángulo CDK, del que conocemos el lado $\overline{DK} = a$ y sus ángulos, con lo que aplicando el teorema del seno obtenemos:

$$\frac{sen\ 120°}{a} = \frac{sen\ 30°}{\overline{CD}} \quad \rightarrow \quad \overline{CD} = \frac{a \cdot sen\ 30°}{sen\ 120°} = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

3) $\overline{AD} = \overline{AJ} + \overline{JL} + \overline{LD} = a_p + \overline{JL} + a$

Calculamos $\overline{JL}$ usando el triángulo IJL del que conocemos que $\overline{IJ} = b$ y sus ángulos, con lo que aplicando el teorema del seno obtenemos:

$$\frac{sen\ 120°}{b} = \frac{sen\ 30°}{\overline{JL}} \quad \rightarrow \quad \overline{JL} = \frac{b \cdot sen\ 30°}{sen\ 120°} = \frac{\sqrt{3}}{3} b$$

Por lo que

$$\overline{AD} = \overline{AJ} + \overline{JL} + \overline{LD} = a_p + \overline{JL} + a = \frac{\sqrt{3}}{2} b + \frac{\sqrt{3}}{3} b + a = \frac{5\sqrt{3}}{6} b + a$$

<u>RELACIÓN ENTRE *a y b*</u>

Pero necesitamos relacionar $a\ y\ b$ para poder simplificar. Para hacerlo, usaremos los triángulos IJL y HIK ya que en ambos aparecen $a\ y\ b$ en sus lados.

Usaremos que $a = \overline{LI} + \overline{IK}$

El triángulo IJL es isósceles con $\overline{LI} = \overline{JL} = \frac{\sqrt{3}}{3} b$

El triángulo HIK es rectángulo en K, con hipotenusa b y ángulo en I de 30°. Podemos afirmar que $\cos 30° = \frac{\overline{IK}}{b} \quad \rightarrow \quad \overline{IK} = \frac{\sqrt{3}}{2} b$

De donde

$$a = \overline{LI} + \overline{IK} = \frac{\sqrt{3}}{3} b + \frac{\sqrt{3}}{2} b = \frac{5\sqrt{3}}{6} b$$

<u>ÁREAS EN FUNCIÓN DE *b*</u>

El área del triángulo $A_{LDK} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{6} b\right)^2 = \frac{25\sqrt{3}}{48} b^2$

El área del hexágono $A_{hex} = \frac{P \cdot a_p}{2} = \frac{6b}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} b = \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2$

El área del trapecio $A_{ABCD} = \frac{\overline{AD} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD})}{2} = \frac{\left(\frac{5\sqrt{3}}{6} b + a\right) \cdot \left(\frac{5b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} a\right)}{2} =$

$$= \frac{\left(\frac{5\sqrt{3}}{6} b + \frac{5\sqrt{3}}{6} b\right) \cdot \left(\frac{5b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} b\right)}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{9} b^2$$

RELACIONES ENTRE LAS ÁREAS

La proporción entre el área del triángulo y la del trapecio:

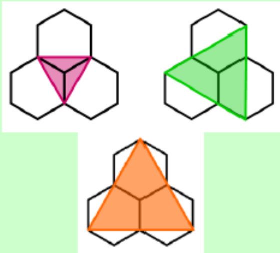
$$\frac{\mathrm{A}_{\mathrm{LDK}}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{25\sqrt{3}}{48}b^2}{\frac{25\sqrt{3}}{9}b^2} = \frac{3}{16} = 0.1875$$

La proporción entre el área del triángulo y la del hexágono:

$$\frac{\mathrm{A}_{\mathrm{LDK}}}{A_{hex}} = \frac{\frac{25\sqrt{3}}{48}b^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2} = \frac{25}{72} = 0.347\hat{2}$$

21* **22**

Calcula la razón entre el área del triángulo y la de uno de los hexágonos en cada uno de los tres casos adjuntos.



Solución:

1. En el caso del triángulo verde, cada uno de los hexágonos está dividido en dos trozos, de los que uno es del triángulo y el otro no.

El hexágono está formado por dos piezas y el triángulo por tres, así que la razón pedida es:

$$\frac{A_{triángulo}}{A_{hexágono}} = \frac{3}{2}$$

En los dos casos restantes, dividimos los hexágonos en 6 triángulos tal y como se ve en el dibujo.

2. En el caso del triángulo violeta, el triángulo está formado por tres piezas y el hexágono por seis, por lo que:

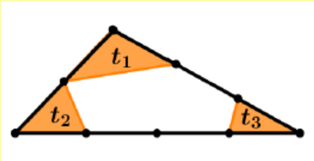
$$\frac{A_{triángulo}}{A_{hexágono}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

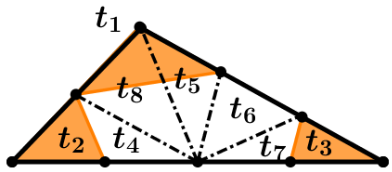
3. Para el triángulo naranja necesitamos 12 piezas, obtendremos entonces:

$$\frac{A_{triángulo}}{A_{hexágono}} = \frac{12}{6} = 2$$

24** **25**

Sea el triángulo t de vértices A, B y C, con $\overline{AB}, \overline{AC}$ y $\overline{BC}$ proporcionales a 2, 3 y 4, respectivamente. Calcula el cociente entre la superficie del triángulo t y la suma de las de los triángulos t_1, t_2 y t_3 de la imagen.





Solución:

Trazamos los segmentos que se ven en la imagen para trocear el triángulo ABC en triángulos más pequeños. Los lados de ABC están divididos en 2, 3 y 4 partes respectivamente.

Los triángulos t_2 y t_4 tienen la misma altura y las bases del mismo tamaño, por tanto, la misma superficie.

Lo mismo ocurre con t_7 y t_3 y con t_5 y t_6.

Con el mismo razonamiento t_8 ocupa lo mismo que t_2 y t_4 juntos.

Si comparamos $t_5 + t_6$ con $t_7 + t_3$, tienen la misma altura y el primer grupo el doble de base, por tanto, su área será el doble.

La superficie del triángulo ABC será la suma de las de los triangulitos:

$$t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 = t_2 + t_3 + t_2 + t_5 + t_6 + t_3 + 2 \cdot t_2 =$$

$$= t_2 + t_3 + t_2 + 2 \cdot (t_3 + t_7) + t_3 + 2 \cdot t_2 =$$

$$= t_2 + t_3 + t_2 + 2 \cdot (t_3 + t_3) + t_3 + 2 \cdot t_2 = 4 \cdot t_2 + 6 \cdot t_3 = *$$

Comparamos t_1 y t_3: ambos tienen la misma base, pero la altura de t_3 es la mitad que la de t_1, por lo que el área de t_1 es el doble de la de t_3.

Comparamos ahora t_2 y t_3: ambos tienen la misma base, pero las alturas cumplen que el doble de la de t_2 coincide con el triple de la de t_3, con lo que la relación entre áreas será la misma ($2t_2 = 3t_3$).

$$* = 6t_3 + 6t_3 = 12t_3$$

Si sumamos las áreas de los triángulos t_1, t_2 y t_3 obtendremos

$t_1 + t_2 + t_3 = 2t_3 + \frac{3}{2}t_3 + t_3 = \frac{9}{2}t_3$

El cociente pedido será

$$\frac{12t_3}{\frac{9}{2}t_3} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

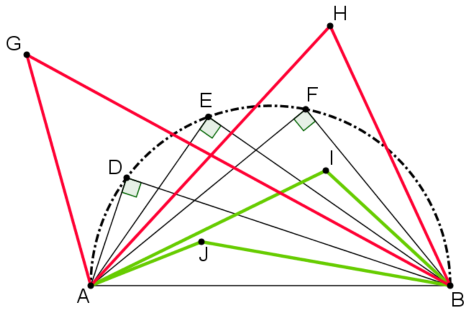
26*** 27

Los puntos P y Q están respectivamente en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ del cuadrado $ABCD$ de forma que $\overline{AP}:\overline{PB} = \overline{DQ}:\overline{QC} = 1:3$.

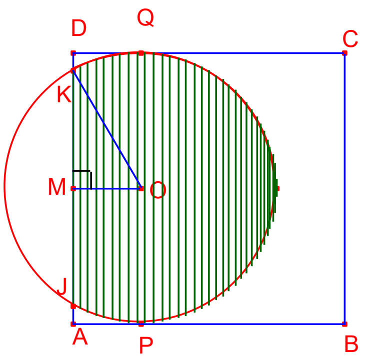
Dado un punto X escogido aleatoriamente dentro del cuadrado, calcula la probabilidad de que el ángulo $\widehat{PXQ}$ sea obtuso.

Solución:

En cualquier semicircunferencia se cumple que los ángulos inscritos en la misma (D, E, F) tienen una amplitud de $90°$.
Si el vértice está dentro del círculo (I, J) el ángulo es mayor que $90°$, es decir, obtuso.
Si el vértice está fuera del círculo (H, G) el ángulo es de menos de $90°$, es decir, agudo.



Para que se cumpla la relación 1:3 que indica el problema, usaremos



$\overline{AB} = 4, \overline{AP} = \overline{AQ} = 1$

Sea O el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

Los puntos X del cuadrado tales que $\widehat{PXQ} > 90°$ pertenecen a la intersección del cuadrado $ABCD$ y el círculo de centro O y radio $\overline{OP} = 2$.

Sea M el punto medio del lado $\overline{AD}$.

La probabilidad de que $\widehat{PXQ} > 90°$, es igual al cociente entre el área rayada y el área del cuadrado $ABCD$.

$\overline{OM} = 1, \overline{OK} = 2 \quad \rightarrow \quad cos\,\widehat{MOK} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \widehat{MOK} = 60° \quad \rightarrow \quad \widehat{JOK} = 120°$

El área sin rayar será la del sector JOK menos la del triángulo JOK:

$$A = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2$$

El área rayada es:

$$S_{rayada} = \pi \cdot 2^2 - \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2\right) = \frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}$$

El área del cuadrado $ABCD$ es:

$$S_{ABCD} = 4^2 = 16$$

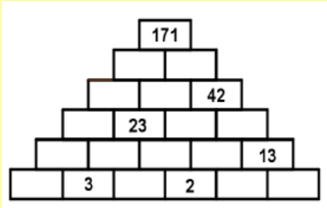
La probabilidad es:

$$p = \frac{S_{rayada}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}}{16} \approx 0.6319$$

28**

Sabiendo que cada número de la pirámide se obtiene sumando los dos que tiene debajo, completa las casillas vacías.

29

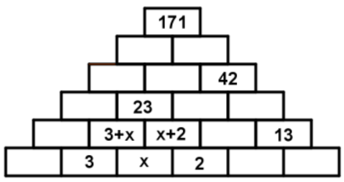


Solución:

Empezaremos por el número que se encuentra entre el 3 y el 2 de la base:

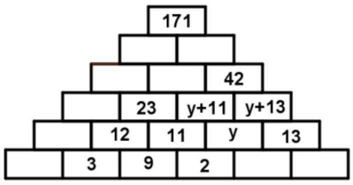
Si lo llamamos x, tendremos que el 23 que está dos filas más arriba será el resultado de

$$3 + x + x + 2 = 23 \quad \rightarrow \quad 2x = 18 \quad \rightarrow \quad x = 9$$
$$3 + x = 12$$
$$x + 2 = 11$$



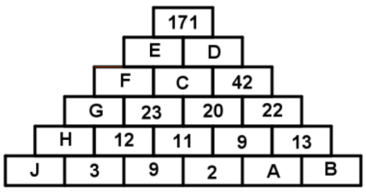
Pasamos a la segunda fila y calculamos de la misma forma y:

$$y + 11 + y + 13 = 42 \quad \rightarrow \quad 2y = 19 \quad \rightarrow \quad y = 9$$
$$y + 11 = 20$$
$$y + 13 = 22$$



Las casillas que faltan las hallaremos usando que la suma de los dos inferiores es el número que tienen encima:

2+A=9 → A=7
A+B=13 → 7+B=13 → B=6
23+20=C → C=43
43+42=D → D=85
E+D=171 → E+85=171 → E=86



F+C=E → F+43=86 → F=43
G+23=F → G+23=43 → G=20
H+12=G → H+12=20 → H=8
J+3=H → J+3=8 → J=5

Con esto, la pirámide queda así: