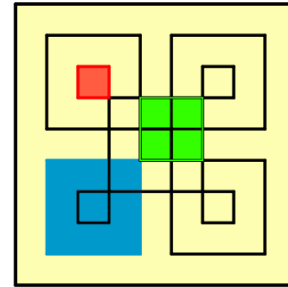
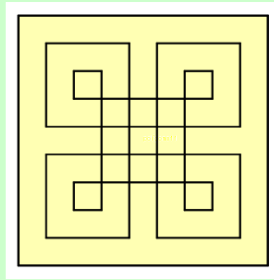


SOLUCIONS – NOVEMBRE 2025

1*

Quants quadrats pots comptar en la figura adjunta?



Solució:

Hi ha quatre grandàries de quadrats: el gran que envolta tot el dibuix i els tres acolorits en la imatge.

Contem per grandària:

Gran: 1

Blau: 5

Verd: 4

Taronja: 13

En total: $1+5+4+13=23$ quadrats.

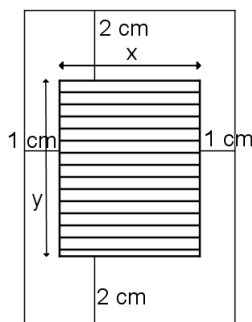
3 ggb

4

Un full de propaganda porta un text imprès que ocupa 18 cm^2 , els marges superior i inferior han de mesurar 2 cm cadascun i els laterals 1 cm cadascun. Troba les dimensions que ha de tenir el full perquè la despesa en paper siga la mínima possible.



Solució:



Amb les dades que tenim en el dibuix adjunt, la superfície escrita complirà $x \cdot y = 18 \rightarrow y = \frac{18}{x}$

La funció que ens donarà la superfície del full serà

$$S(x, y) = (x + 2)(y + 4) \rightarrow S(x) = (x + 2) \left(\frac{18}{x} + 4 \right)$$

Busquem els valors de x i y per als quals s'aconsegueix el mínim. Introduïm a la barra d'entrada la funció $S(x)$ i hi busquem els extrems:

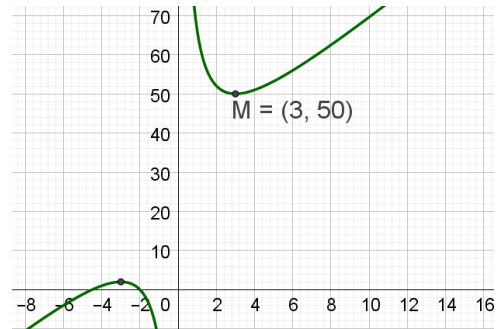
Obtenim que la superfície mínima s'obté quan $x=3$, i és de 50 cm^2 .

El full mesurarà:

$x + 2 = 5 \text{ cm}$ de base

$y + 4 = \frac{18}{x} + 4 = \frac{18}{3} + 4 = 10 \text{ cm}$ d'altura.

El text imprés seria de $3 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$.



5**

6

Iñaki té peses de 4, 5, 6, 7, ..., 2017 grams.

a) Iñaki pot equilibrar la balança de dos plats utilitzant totes les peses alhora?

b) Iñaki pot equilibrar la balança utilitzant totes les peses que tindrà quan l'Ana li done una pesa d'1 gram?



Solució:

a) La suma inicial de les 2014 peses que té Iñaki és:

$4 + 5 + 6 + \dots + 2017 = (4 + 2017) \cdot \frac{2014}{2} = 2\,035\,147$ grams, que és una quantitat imparella. Per tant, les peses d'Iñaki no es poden col·locar a la balança de manera que els dos plats estiguen equilibrats.

b) Tenim un total de $2014 + 1 = 2015$ peses. És una quantitat imparella, per la qual cosa no es poden dividir en parelles. Aleshores, deixant de banda les peses d'1, 4 i 5 grams, emparellem les peses restants amb el mateix pes total:

$(2017;6), (2016;7), \dots, (1012;1011)$

Són $\frac{2015-3}{2} = 1006$ parelles. Podem col·locar la meitat, 503 parelles, a cada plat. En aquest moment, la balança està equilibrada. Falta col·locar les peses d'1, 4 i 5 grams. Posem a una banda les d'1 i 4 grams, i a l'altra la de 5 grams.

7 ggb

8

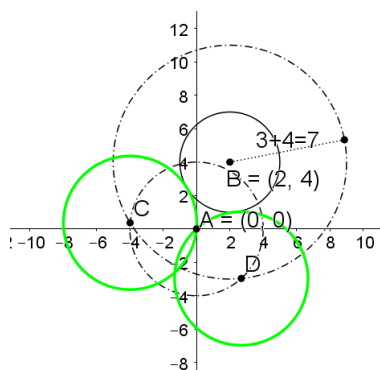
Troba totes les circumferències de radi 4 que passen per $A(0,0)$ i són tangents a la circumferència de radi 3 centrada en $B(2,4)$.



Solució amb geogebra:

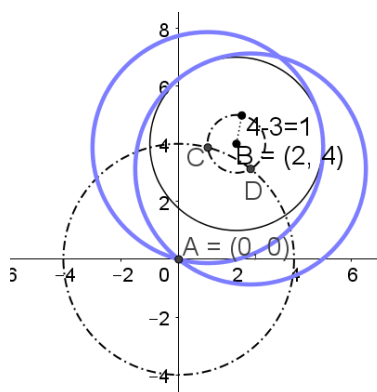
1a part: amb la circumferència centrada en $B(2,4)$ externa a les quals busquem:

1. Si les circumferències que busquem han de tindre 4 unitats de radi i passar per $A(0,0)$, els centres han d'estar en la circumferència centrada en A i amb radi 4. La tracem.
2. Tracem la circumferència amb centre a $B(2,4)$ i radi 3.
3. Perquè les circumferències que busquem siguin tangents a aquesta, els centres han d'estar a una distància de $3+4=7$ unitats de B . Tracem la circumferència de radi 7 amb centre a B .
4. Trobem la intersecció d'aquestes dues circumferències i obtenim els punts C i D , que seran els centres de les circumferències que busquem. Les tracem amb radi 4 i centres C i D , respectivament.



2a part: amb la circumferència centrada en $B(2,4)$ interna a les quals busquem:

5. Si les circumferències que busquem han de tindre 4 unitats de radi i passar per $A(0,0)$, els seus centres han d'estar en la circumferència centrada en A i amb radi 4. La tracem.
6. Tracem la circumferència amb centre a $B(2,4)$ i radi 3.
7. Perquè les circumferències que busquem siguin tangents a aquesta, els centres han d'estar a una distància de $4 - 3 = 1$ unitat de B . Tracem la circumferència de radi 1 amb centre a B .
8. Trobem la intersecció d'aquestes dues circumferències i obtenim els punts C i D , que seran els centres de les circumferències que busquem. Les tracem amb radi 4 i centres C i D , respectivament.



10**

Salma va escriure 2026 nombres enters a la pissarra. Claudia es va adonar que la suma de qualsevol grup de 2025 nombres d'aquests sempre és parella. La suma de tots els nombres és parella o imparella?

11



Solució:

Raonarem que tots els nombres que s'han escrit a la pissarra han de ser parells necessàriament.

Suposem que algun d'ells (anomenem-lo N) fora senar. La suma dels 2025 restants, segons l'enunciat, és una quantitat parella. Entre aquests 2025 números hi ha d'haver algun nombre parell, ja que, si els 2025 nombres foren tots imparells, la suma obtinguda seria una quantitat imparella. Anomenem M aquest nombre parell.

Si substituïm el nombre M (que és parell) pel nombre N (que és imparell), el resultat de la suma d'aquests 2025 números canviaria de paritat, i ara seria imparella, la qual cosa contradiu la condició de l'enunciat que la suma de qualsevol grup de 2025 números sempre és parella.

En definitiva, tots els nombres han de ser parells necessàriament, per la qual cosa la suma de tots els nombres ha de ser parella.

12*

Sara ha dibuixat quatre xifres en cartolines diferents per a formar el número 2025.

Quants nombres estrictament majors que 2025 pot formar amb aquestes quatre xifres?

13**Solució:**

En total pot formar 8 nombres:

2052, 2205, 2250, 2502, 2520, 5022, 5202, 5220

14*****15**

Tenim dos cubs les arestes dels quals mesuren quantitats enteres. A més, el volum conjunt és igual a la longitud conjunta de totes les arestes.

Què mesura l'aresta de cada cub?

**Solució:**

Anomenarem x i y a les longituds de les arestes dels dos cubs.

Es compleix que $x^3 + y^3 = 12x + 12y \rightarrow x^3 + y^3 = 12(x + y)$

També

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \rightarrow x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2$$

De les dues igualtats

$$(x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 12(x + y) \rightarrow (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 12(x + y)$$

Com és impossible que $x + y = 0$, podem afirmar que

$$(x + y)^2 - 3xy = 12 \rightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 3xy - 12 = 0 \rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - xy - 12 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - xy - 12 - xy = 0 - xy \rightarrow$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 12 - xy \rightarrow (x - y)^2 = 12 - xy$$

Com $(x - y)^2$ és un quadrat, podem assegurar que no serà negativa l'expressió $12 - xy \rightarrow 12 \geq xy$

Sabem per l'enunciat que tant x com y són enters. Analitzem les opcions possibles:

x, y	$x \cdot y$	$x^3 + y^3$	$x^3 + y^3$ ha de ser parell	$12(x + y)$	
12,1	12	1728+1=1729	N		
6,2	12	216+8=224		12·8=96	N
4,3	12	64+27=91	N		
11,1	11	1331+1=1332		12·12=144	N
10,1	10	1000+1=1001	N		
5,2	10	125+8=133	N		
9,1	9	729+1=730		12·10=120	N
3,3	9	27+27=54		12·6=72	N
8,1	8	512+1=513	N		
4,2	8	64+8=72		12·6=72	S
7,1	7	343+1=344		12·8=96	N
6,1	6	216+1=217	N		
3,2	6	27+8=35	N		
5,1	5	125+1=126		12·6=72	N
4,1	4	64+1=65	N		
2,2	4	8+8=16		12·4=48	N
3,1	3	27+1=28		12·4=48	N
2,1	2	8+1=9	N		
1,1	1	1+1=2		12·2=24	N

L'única opció possible és que el cub menut tinga una aresta de 2 unitats i el gran de 4.

17*

Divideix el rectangle en quatre parts de manera que les sumes dels nombres continguts en elles siguin iguals.

18

8	6	5	10	12
9	10	3	4	3
1	5	2	1	4
9	3	11	2	8

Solució:

Per saber el que han de sumar els nombres de cadascun dels quatre trossos, sumem tots els de la taula i dividim entre 4:

Suma=116

116:4=29 és el que han de sumar els nombres de cada tros.

8	6	5	10	12
9	10	3	4	3
1	5	2	1	4
9	3	11	2	8

19 ggb

20

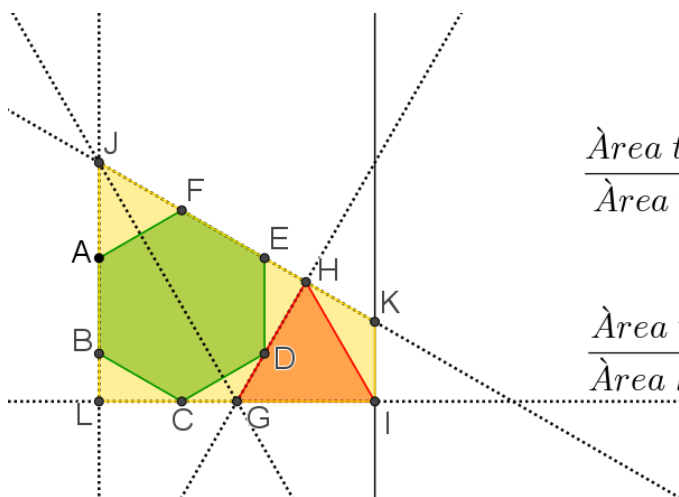
La figura està formada per un trapezi rectangular que conté un hexàgon regular i un triangle equilàter.

a) Calcula la proporció entre les àrees del triangle equilàter i el trapezi.

b) Calcula la proporció entre les àrees del triangle equilàter i l'hexàgon regular.



Solució amb geogebra:

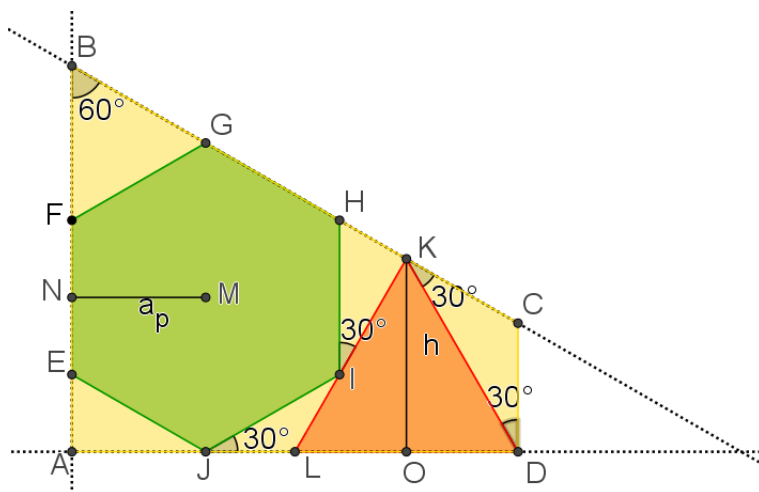


$$\frac{\text{Àrea triangle}}{\text{Àrea trapezi}} = \frac{0.90211}{4.81125} = 0.1875$$

$$\frac{\text{Àrea triangle}}{\text{Àrea hexàgon}} = \frac{0.90211}{2.59808} = 0.34722$$

1. Comencem per dibuixar l'hexàgon amb polígon regular i els punts A(0,1) i B(0,0).
2. Tracem les rectes pels costats AB i EF, que coincideixen amb dos dels costats del trapezi, i la perpendicular per C a la recta per A i B, que serà la base.
3. Dibuixem la mediatriu del costat CD de l'hexàgon. El punt G de tall amb la recta de la base serà el vèrtex esquerre de la base del triangle.
4. Com que és equilàter, els seus angles mesuren tots 60°. Tracem un angle de 60° amb vèrtex en G i sentit antihorari. El punt H de tall amb la recta per E i F serà un altre vèrtex del triangle. Ja podem dibuixar-lo amb polígon regular.
5. La perpendicular a la base pel vèrtex I del triangle ens donarà el costat que faltava del trapezi. Ja podem dibuixar-lo amb polígon i obtenir-ne la superfície.
6. Les àrees del triangle i de l'hexàgon ja les teníem en la vista algebraica. Només cal fer les divisions.

Solució analítica:



Anomenarem a al costat del triangle i b al de l'hexàgon.

ÀREA DEL TRIANGLE

L'altura serà $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

L'àrea del triangle $A_{LDK} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

ÀREA DE L'HEXÀGON

L'apotema serà $a_p = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}b$

L'àrea de l'hexàgon $A_{hex} = \frac{P \cdot a_p}{2} = \frac{6b}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2$

ÀREA DEL TRAPEZI

$$A_{ABCD} = \frac{\overline{AD} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD})}{2}$$

Calculem les tres longituds que necessitem:

$$1) \overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FB} = \frac{b}{2} + b + b = \frac{5b}{2}$$

2) Per calcular $\overline{CD}$ usarem el triangle CDK , del qual coneixem el costat $\overline{DK} = a$

i els angles, hi apliquem el teorema del sinus i obtenim:

$$\frac{\sin 120^\circ}{a} = \frac{\sin 30^\circ}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} = \frac{a \cdot \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$3) \overline{AD} = \overline{AJ} + \overline{JL} + \overline{LD} = a_p + \overline{JL} + a$$

Calculem $\overline{JL}$ usant el triangle IJL , del qual coneixem que $\overline{IJ} = b$ i els angles, hi apliquem el teorema del sinus i obtenim:

$$\frac{\sin 120^\circ}{b} = \frac{\sin 30^\circ}{\overline{JL}} \rightarrow \overline{JL} = \frac{b \cdot \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} b$$

Per tant:

$$\overline{AD} = \overline{AJ} + \overline{JL} + \overline{LD} = a_p + \overline{JL} + a = \frac{\sqrt{3}}{2} b + \frac{\sqrt{3}}{3} b + a = \frac{5\sqrt{3}}{6} b + a$$

RELACIÓ ENTRE a i b

Ens cal relacionar a i b per poder simplificar. Per fer-ho, usarem els triangles IJL i HIK , ja que en ambdós apareixen a i b en els costats.

Usarem que $a = \overline{LI} + \overline{IK}$

El triangle IJL és isòsceles amb $\overline{LI} = \overline{JL} = \frac{\sqrt{3}}{3} b$

El triangle HIK és rectangle en K , amb hipotenusa b i angle en I de 30° . Podem afirmar que $\cos 30^\circ = \frac{\overline{IK}}{b} \rightarrow \overline{IK} = \frac{\sqrt{3}}{2} b$

D'on obtenim:

$$a = \overline{LI} + \overline{IK} = \frac{\sqrt{3}}{3} b + \frac{\sqrt{3}}{2} b = \frac{5\sqrt{3}}{6} b$$

ÀREES EN FUNCIÓ DE b

$$\text{L'àrea del triangle } A_{LDK} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{6} b \right)^2 = \frac{25\sqrt{3}}{48} b^2$$

$$\text{L'àrea de l'hexàgon } A_{hex} = \frac{P \cdot a_p}{2} = \frac{6b}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} b = \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2$$

$$\begin{aligned} \text{L'àrea del trapezi } A_{ABCD} &= \frac{\overline{AD} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD})}{2} = \frac{\left(\frac{5\sqrt{3}}{6} b + a \right) \cdot \left(\frac{5b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} a \right)}{2} = \\ &= \frac{\left(\frac{5\sqrt{3}}{6} b + \frac{5\sqrt{3}}{6} b \right) \cdot \left(\frac{5b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} b \right)}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{9} b^2 \end{aligned}$$

RELACIONS ENTRE LES ÀREES

La proporció entre l'àrea del triangle i la del trapezi:

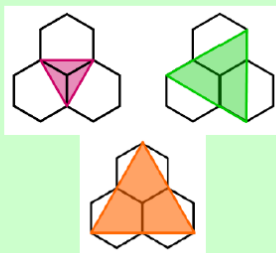
$$\frac{A_{LDK}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{25\sqrt{3}}{48} b^2}{\frac{25\sqrt{3}}{9} b^2} = \frac{3}{16} = 0.1875$$

La proporció entre l'àrea del triangle i la de l'hexàgon:

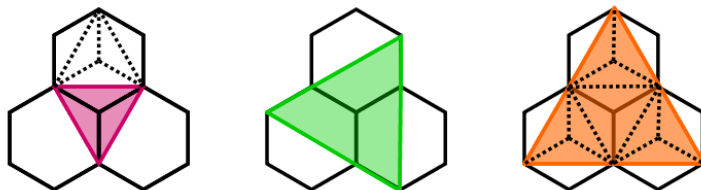
$$\frac{A_{LDK}}{A_{hex}} = \frac{\frac{25\sqrt{3}}{48} b^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2} b^2} = \frac{25}{72} = 0.347\hat{2}$$

21***22**

Calculeu la raó entre l'àrea del triangle i la d'un dels hexàgons en cadascun dels tres casos adjunts.



Solució:



1. En el cas del triangle verd, cadascun dels hexàgons està dividit en dos trossos, dels quals un és del triangle i l'altre no.

L'hexàgon està format per dues peces i el triangle per tres, així que la raó demanada és:

$$\frac{A_{triangle}}{A_{hexàgon}} = \frac{3}{2}$$

En els dos casos restants dividim els hexàgons en 6 triangles, tal com es veu al dibuix.

2. En el cas del triangle violeta, el triangle està format per tres peces i l'hexàgon per sis, per la qual cosa:

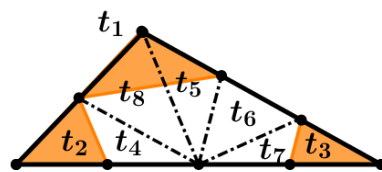
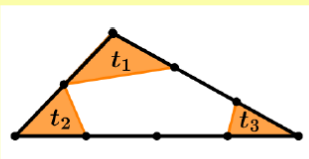
$$\frac{A_{triangle}}{A_{hexàgon}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. Per al triangle taronja necessitem 12 peces, i obtindrem:

$$\frac{A_{triangle}}{A_{hexàgon}} = \frac{12}{6} = 2$$

24****25**

Siga el triangle t de vèrtexs A, B i C , amb $\overline{AB}, \overline{AC}$ i $\overline{BC}$ proporcionals a 2, 3 i 4, respectivament. Calcula el quocient entre la superfície del triangle t i la suma de les dels triangles t_1, t_2 i t_3 de la imatge.

**Solució:**

Tracem els segments que es veuen a la imatge per trossejar el triangle ABC en triangles més menuts. Els costats del triangle ABC estan dividits en 2, 3 i 4 parts, respectivament.

Els triangles t_2 i t_4 tenen la mateixa altura i les bases mesuren el mateix. Per tant, tenen la mateixa superfície.

El mateix passa amb t_7 i t_3 i amb t_5 i t_6 .

Amb el mateix raonament, t_8 ocupa el mateix que t_2 i t_4 junts.

Si comparem $t_5 + t_6$ amb $t_7 + t_3$, tenen la mateixa altura i el primer grup el doble de base. Per tant, l'àrea serà el doble.

La superfície del triangle ABC serà la suma de les dels triangles menuts:

$$\begin{aligned} t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 &= t_2 + t_3 + t_2 + t_5 + t_6 + t_3 + 2 \cdot t_2 = \\ &= t_2 + t_3 + t_2 + 2 \cdot (t_3 + t_7) + t_3 + 2 \cdot t_2 = \\ &= t_2 + t_3 + t_2 + 2 \cdot (t_3 + t_3) + t_3 + 2 \cdot t_2 = 4 \cdot t_2 + 6 \cdot t_3 = * \end{aligned}$$

Comparem t_1 i t_3 : ambdós tenen la mateixa base, però l'altura de t_3 és la meitat que la de t_1 , per la qual cosa l'àrea de t_1 és el doble de la de t_3 .

Comparem ara t_2 i t_3 : ambdós tenen la mateixa base, però les altures compleixen que el doble de la de t_2 coincideix amb el triple de la de t_3 , amb la qual cosa la relació entre les àrees serà la mateixa ($2t_2 = 3t_3$).

$$* = 6t_3 + 6t_3 = 12t_3$$

Si sumem les àrees dels triangles t_1, t_2 i t_3 obtindrem

$$t_1 + t_2 + t_3 = 2t_3 + \frac{3}{2}t_3 + t_3 = \frac{9}{2}t_3$$

El quocient demanat serà

$$\frac{12t_3}{\frac{9}{2}t_3} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

26***

Els punts P i Q estan respectivament en els costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ del quadrat $ABCD$ de forma que $\overline{AP}:\overline{PB} = \overline{DQ}:\overline{QC} = 1:3$.

Donat un punt X escollit aleatòriament dins del quadrat, calcula la probabilitat que l'angle $\widehat{PXQ}$ siga obtús.

27

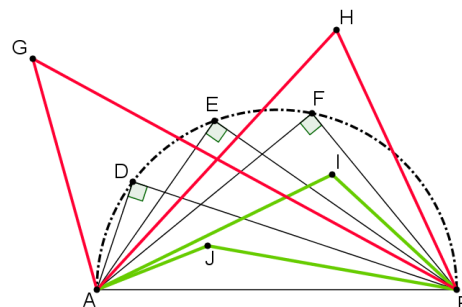


Solució:

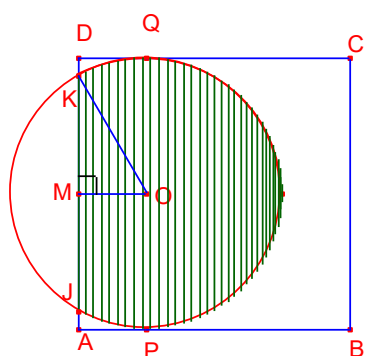
En qualsevol semicircumferència es compleix que els angles inscrits en ella (D, E, F) tenen una amplitud de 90° .

Si el vèrtex està dins del cercle (I, J) l'angle és major que 90° , és a dir, obtús.

Si el vèrtex està fora del cercle (H, G) l'angle és menor que 90° , és a dir, agut.



Perquè es complisca la relació 1:3 que indica el problema, farem servir



$$\overline{AB} = 4, \overline{AP} = \overline{AQ} = 1$$

Siga O el punt mitjà del segment $\overline{PQ}$.

Els punts X del quadrat tals que $\widehat{PXQ} > 90^\circ$ pertanyen a la intersecció del quadrat $ABCD$ i el cercle de centre O i radi $\overline{OP} = 2$.

Siga M el punt mitjà del costat $\overline{AD}$.

La probabilitat que $\widehat{PXQ} > 90^\circ$ és igual al quocient entre l'àrea ratllada i l'àrea del quadrat $ABCD$.

$$\overline{OM} = 1, \overline{OK} = 2 \rightarrow \cos \widehat{MOK} = \frac{1}{2} \rightarrow \widehat{MOK} = 60^\circ \rightarrow \widehat{JOK} = 120^\circ$$

L'àrea sense ratllar serà la del sector JOK menys la del triangle JOK :

$$A = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2$$

L'àrea ratllada és:

$$S_{ratllada} = \pi \cdot 2^2 - \left(\frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 \right) = \frac{8}{3} \pi + \sqrt{3}$$

L'àrea del quadrat $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = 4^2 = 16$$

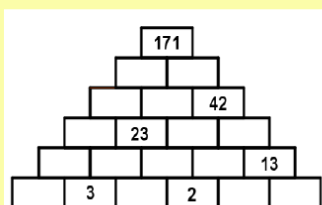
La probabilitat és:

$$p = \frac{S_{ratllada}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{8}{3} \pi + \sqrt{3}}{16} \approx 0.6319$$

28**

Sabent que cada número de la piràmide s'obté sumant els dos que té davall, completa les caselles buides.

29



Solució:

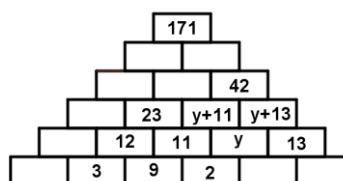
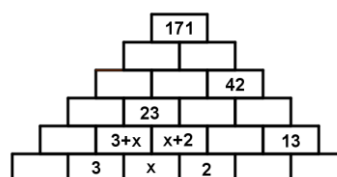
Començarem pel número que es troba entre el 3 i el 2 de la base:

Si l'anomenem x , tindrem que el 23 que està dues files més amunt serà el resultat de

$$\begin{aligned} 3 + x + x + 2 &= 23 \rightarrow 2x = 18 \rightarrow x = 9 \\ 3 + x &= 12 \\ x + 2 &= 11 \end{aligned}$$

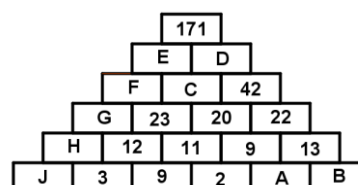
Passem a la segona fila i calculem de la mateixa manera y :

$$\begin{aligned} y + 11 + y + 13 &= 42 \rightarrow 2y = 19 \rightarrow y = 9 \\ y + 11 &= 20 \\ y + 13 &= 22 \end{aligned}$$



Les caselles que falten les calcularem usant que la suma de los dues inferiors és el número que tenen damunt:

$$\begin{aligned} 2 + A &= 9 \rightarrow A = 7 \\ A + B &= 13 \rightarrow 7 + B = 13 \rightarrow B = 6 \\ 23 + 20 &= C \rightarrow C = 43 \\ 43 + 42 &= D \rightarrow D = 85 \\ E + D &= 171 \rightarrow E + 85 = 171 \rightarrow E = 86 \end{aligned}$$



$$F+C=E \rightarrow F+43=86 \rightarrow F=43$$

$$G+23=F \rightarrow G+23=43 \rightarrow G=20$$

$$H+12=G \rightarrow H+12=20 \rightarrow H=8$$

$$J+3=H \rightarrow J+3=8 \rightarrow J=5$$

Amb açò, la piràmide queda així:

171					
86			85		
43		43		42	
20		23		22	
8	12	11	9	13	
5	3	9	2	7	6