# SOLUCIONS – SETEMBRE 2026

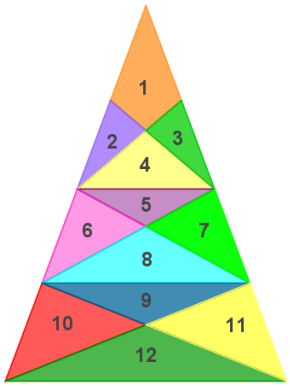
## 1*

Quants triangles pots comptar a la figura?



**SOLUCIÓ:**

Començarem numerant els 12 polígons que formen la figura per comptar després els triangles en funció del nombre de peces que els formen.

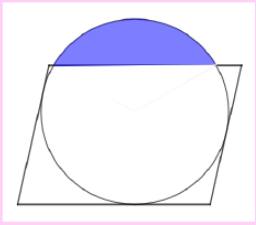



1. Una peça: des del 2 fins al 12. En total, 11.
2. Dos peces: 2+4, 3+4, 2+1, 3+1, 5+6, 5+7, 6+8, 7+8, 9+10, 9+11, 10+12, 11+12. En total, 12.
3. De tres peces: cap.
4. De quatre peces: 1+2+3+4, 2+4+5+6, 3+4+5+7, 6+8+9+10, 7+8+9+11. En total, 5.
5. De sis peces: 1+2+3+4+5+6, 1+2+3+4+5+7. En total, 2.
6. De huit peces: 1+2+3+4+5+6+7+8. En total, 1.
7. De deu peces: 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10, 1+2+3+4+5+6+7+8+9+11. En total, 2.
8. De dotze peces: 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12. En total, 1.

El número total de triangles serà 11+12+5+2+1+2+1=34.

**2***** **3**

Calcula l'àrea del segment circular blau sabent que les altures del paral·lelogram mesuren 3 i 4 cm.



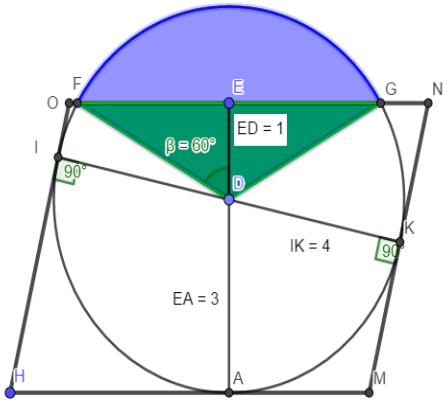
**SOLUCIÓ:**

L'altura obliqua IK mesura 4 cm i l'altura vertical EA mesura 3 cm.

L'alçada IK és perpendicular als costats en els punts de tangència.

La perpendicular a una tangent a una circumferència en el punt de tangència passa pel centre.

Les dues altures IK i AE es tallen al centre D.




El radi de la circumferència $\quad r = \frac{IK}{2} = 2 = AD = FD \rightarrow ED = 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $EFD$:
$FE = \sqrt{FD^2 - ED^2} = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$

$cos\beta = \frac{ED}{FD} = \frac{1}{2} \rightarrow \quad \beta = \angle EDF = \frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$

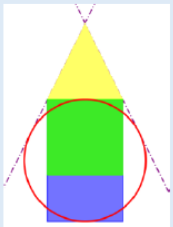
$$\text{Àrea}_{segment\ circular} = \text{Àrea}_{sector} - \text{Àrea}_{triangle} = \frac{1}{2} r^2 \theta - \frac{1}{2} bh =$$

$$= \frac{1}{2} 2^2 \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} 2\sqrt{3} \cdot 1 = \mathbf{\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}} \cong 2.46\ cm^2$$

## 4 ggb 5

La figura està formada per un triangle isòsceles, un quadrat, un rectangle auri i una circumferència.

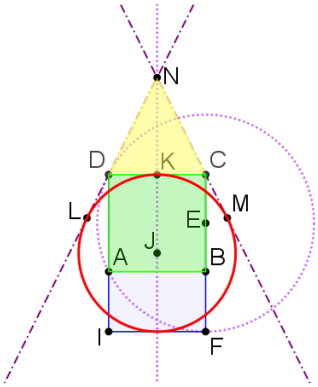
Calcula la proporció entre les àrees del triangle isòsceles i del quadrat.



**SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:**

Passos a seguir:

1. Tracem el quadrat ABCD amb polígon regular.
2. Per al rectangle auri trobem el punt mitjà del costat BC i tracem la circumferència amb centre a E que passe per A.




$$\frac{\textit{Àrea triangle}}{\textit{Àrea quadrat}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

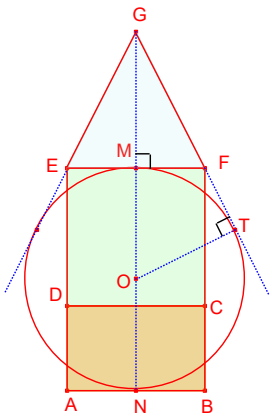
Ens donarà el vèrtex F del rectangle com la intersecció d'aquesta circumferència amb la prolongació del costat CB del quadrat.

Per obtenir el vèrtex I del rectangle perllonguem el costat AD i tracem la perpendicular per F al costat BC. Tracem el rectangle.

3. Per obtenir el centre de la circumferència roja J tracem la mediatriu del segment CD i la recta per D i F. Estarà en la intersecció de totes dues. Amb el punt mitjà del segment CD la dibuixem.
4. Per trobar el vèrtex N del triangle tracem les rectes tangents a la circumferència roja per C i per D. N és el punt d'intersecció d'ambdues.
5. Tracem el triangle CDN.
6. Les superfícies, tant del quadrat com del triangle, apareixen a la vista algebraica. La relació entre ambdues és d'1:2.

**SOLUCIÓ ANALÍTICA:**

El fet que un rectangle siga auri ens diu que la relació entre els costats és el nombre d'or. És a dir, que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$, per la qual cosa podem considerar que $\overline{AB} = \phi$ i $\overline{BC} = 1$




Com que el rectangle ABFE també és auri, s'ha de complir la mateixa proporció:

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BF}}{\phi} = \phi \quad \rightarrow \quad \overline{BF} = \phi^2$$

Anomenarem $\overline{GM}=x$

Els triangles rectangles GMF i GTO són semblants per tindre un angle en comú i un angle recte. Es complirà:

$$\frac{\frac{\Phi}{2}}{x}=\frac{\frac{\Phi^2}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{\Phi^2}{2}\right)^2-\left(\frac{\Phi^2}{2}\right)^2}}$$

Simplificant:

$\sqrt{x^2+\Phi^2 x}=\Phi x$

Resolent l'equació:

$x=\Phi$

$S_{EFG}=\frac{1}{2}\cdot\Phi\cdot\Phi=\frac{1}{2}\Phi^2$

$S_{CDEF}=\Phi^2$

$\frac{S_{EFG}}{S_{CDEF}}=\frac{1}{2}$

**7 ggb** **8**

Dibuixa un triangle ABC del qual coneixem que:

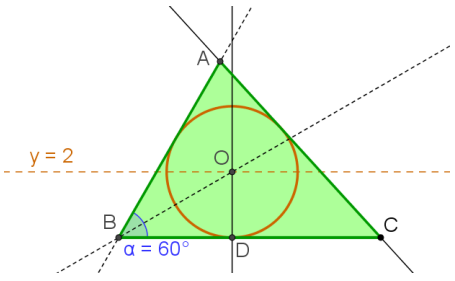
- El costat $\overline{BC}$ mesura 8 cm
- L'angle $\hat{B}$ mesura 60°
- El radi de la circumferència inscrita mesura 2 cm.



**SOLUCIÓ AMB GEOGEBRA:**

Passos a seguir:

1. Dibuixem el segmento $\overline{BC}$ de 8 cm amb $B(0,0)$ i $C(8,0)$.
2. Amb angle segons amplària, l'angle en el vèrtex B de 60°.
3. El centre de la circumferència inscrita és a 2 cm de la base BC i en la bisectriu de l'angle $\hat{B}$, així que tracem la bisectriu i introduïm la recta $y=2$.




4. La intersecció de les dues rectes ens dona el centre O de la circumferència inscrita.

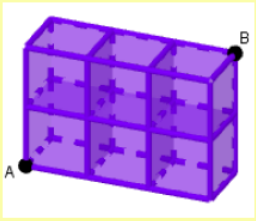
5. Tracem la perpendicular a la base per O per obtenir el punt D que pertany a la circumferència inscrita. Ja la podem dibuixar.
6. Tracem la tangent a la circumferència per C per obtenir el tercer costat del triangle. Trobem A amb la intersecció d'aquesta tangent i la recta que ens ha definit l'angle de 60°.
7. Dibuixem el triangle.

## 9**

La figura està formada per sis cubs massissos d'aresta 1.

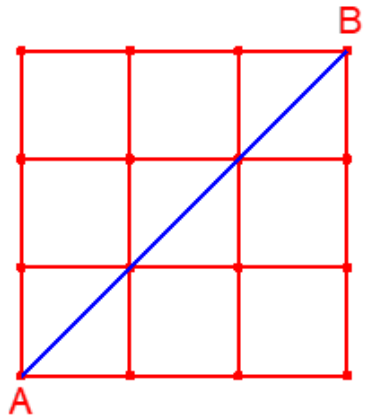
Calcula la distància mínima entre els vèrtexs A i B.

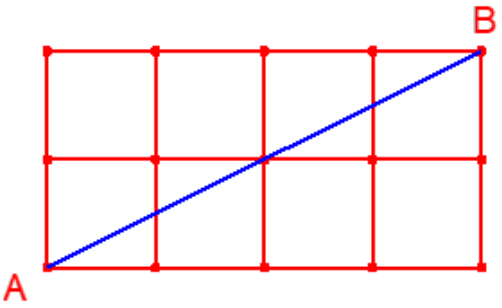
## 10




**SOLUCIÓ:**

Considerem els dos desenvolupaments de la figura, ja que la distància mínima serà un dels dos recorreguts en línia recta possibles:




$AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4.24$ $\quad AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$

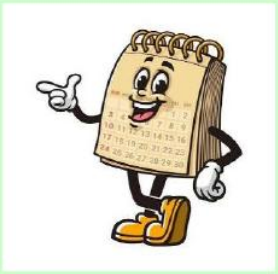
De manera que el primer recorregut és més curt que el segon.

**11*** **12**

En un determinat mes hi ha 5 dilluns, 5 dimarts i 5 dimecres.

Quin dia de la setmana és el 25?

Quants dies té aquest mes?



**SOLUCIÓ:**

Un mes de 28 dies té exactament quatre setmanes completes. Per tant: quatre dilluns, quatre dimarts, …, quatre diumenges.

Si el nostre mes té 5 dilluns, 5 dimarts i 5 dimecres, té tres dies més, és a dir, té 31 dies.

Si el mes comença en dilluns, es complirà la nostra condició, ja que els tres dies més seran els tres primers d'una setmana.

El mes serà:

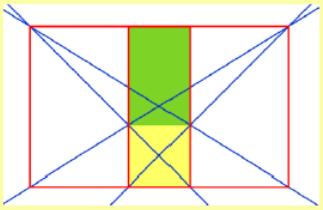
| Dilluns | Dimarts | Dimecres | Dijous | Divendres | Dissabte | Diumenge |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 29 | 30 | 31 | | | | |

Amb la qual cosa el dia 25 serà dijous.

## 14**

La figura està formada per dos quadrats rojos superposats a la intersecció dels quals hi ha un quadrat groc i un rectangle verd. Calculeu la proporció entre l'àrea del rectangle i la del quadrat groc.

## 15



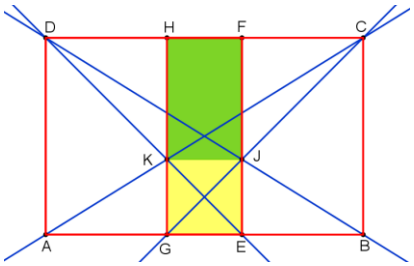
**SOLUCIÓ:**

Anomenarem $\overline{GE} = a$ i $\overline{AG} = \overline{EB} = \overline{FJ} = b$

Es compleix que $\widehat{AEK} = 45°$

$$\overline{BC} = a + b$$

Els triangles $ABC$ i $AGK$ són semblants, per la qual cosa es compleix que




$$\frac{b}{a} = \frac{a+2b}{a+b}$$

D'on

$$b(a+b) = a(a+2b) \rightarrow ab + b^2 = a^2 + 2ab \rightarrow b^2 - ab - a^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{b^2}{a^2} - \frac{ab}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} = 0 \rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Com $a$ y $b$ són positius, l'única solució possible serà $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ , el nombre d'or.

La relació entre las dues àrees serà:

$$\frac{A_{rectangle}}{A_{triangle}} = \frac{a \cdot b}{a^2} = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

## 16*

Aconsegueix com a resultat 100 usant quatre vegades el número 5.

Fes el mateix amb quatre 9.

Les úniques operacions vàlides són suma, resta, multiplicació i divisió.

## 17



**SOLUCIÓ:**

Amb quatre 5:

$$(5+5)\cdot(5+5)=10\cdot 10=100$$

Amb quatre 9:

$$99+\frac{9}{9}=99+1=100$$

## 18**

Un tren tarda 6 segons a passar per un semàfor i 24 segons a travessar un túnel de 240 m de longitud.

Quan tardarà a creuar una estació de 160 m de longitud?

## 19



**SOLUCIÓ:**

El temps que tarda el tren, tant a travessar el túnel com a creuar l'estació, es compta des que el cap del comboi entra fins que ix la cua, és a dir, des que comença a haver-hi tren dins del túnel fins que deixa d'haver-hi (el mateix amb l'estació).

El que el tren tarde 6 segons a passar per un semàfor ens diu que, des el cap el primer vagó arriba al semàfor que la cua el deixa, passen 6 segons. Per tant, des que el cap del tren entra al túnel fins que arriba a la sortida passen $24-6=18$ segons. Aquest és el temps amb què el cap (o qualsevol altre punt del tren) recorre els 240 m del túnel.

Volem saber quant necessita per als 160 m de l'estació, que serà:

$$t=\frac{160}{240}\cdot 18=12 \text{ segons}$$

Per travessar-la haurem d'afegir els 6 segons que passen des que el cap del tren arriba al final de l'estació fins que ho fa la cua.

El tren tardarà $12+6=18$ segons en travessar-la.

**21*** **22**

Sabent que l'ahir del despús-ahir de demà va ser dilluns, quin dia serà el despús-demà del demà del despús-ahir?



**SOLUCIÓ:**

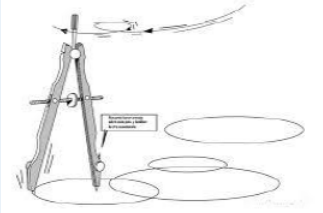
Serà dijous. Per saber-ho col·locarem les dues pistes en una taula amb referència a hui:

| DILLUNS | DIMARTS | DIMECRES | DIJOUS |
|---|---|---|---|
| | | HUI | |
| | | | Demà |
| | Despús-ahir de demà | | |
| Ahir del despús-ahir de demà | | | |
| | | | |
| | | HUI | |
| Despús-ahir | | | |
| | Demà de despús-ahir | | |
| | | | Despús-demà del demà de despús-ahir |

## 23 ggb

Traça totes les circumferències de radi 1 cm que siguen tangents simultàniament a la recta $2x - 3y = 6$ i a la circumferència de centre $C(2,1)$ i radi 4 cm.

## 24

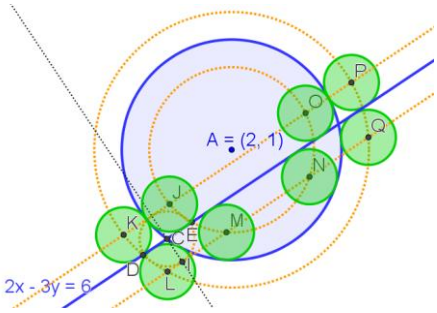


**SOLUCIÓ:**

Passos a seguir:

1. Comencem introduint la recta $2x - 3y = 6$ i dibuixant la circumferència amb centre en $A(2,1)$ i radi 4 (ambdues en blau en el dibuix).

   Les circumferències que busquem tenen ràdio 1 i són tangents a la nostra circumferència, per la qual cosa els seus centres estaran sobre una circumferència centrada a $A(2,1)$, però amb un radi una unitat més gran o menor que 4.




2. Dibuixem les circumferències centrades en A amb radis 3 i 5 (línia de punts taronja en el dibuix).

   També han de ser tangents a la recta, per la qual cosa els seus centres estaran sobre rectes paral·leles a la inicial a una distància d'una unitat (en qualsevol de les dues direccions). Per traçar aquestes rectes, necessitem mesurar aquesta unitat:

3. Trobem el punt C com a intersecció de la recta i la circumferència (valdria qualsevol altre punt de la recta) i tracem la circumferència amb centre a C i radi 1. La intersecció de la circumferència amb la perpendicular a la recta $2x - 3y = 6$ que passe per C ens dona els punts pels quals hem de traçar les paral·leles a $2x - 3y = 6$. Les dibuixem (amb punts taronja en el dibuix).

4. Els vuit punts d'intersecció de les dues circumferències taronges amb les dues rectes taronges ens donen els centres de les circumferències que busquem. Com sabem que tenen radi 1, podem traçar-les.

**25***  26**

Si escric a l'atzar una fracció pròpia que tinga com a denominador el número 900, quina probabilitat hi ha que siga irreductible?



**SOLUCIÓ:**

El fet que la fracció siga pròpia ens diu que el numerador és menor que el denominador, és a dir, hi ha 899 fraccions possibles.

Ens falta saber quantes seran irreductibles, i per això necessitem saber quants d'aquests números tenen almenys un factor comú amb el 900, perquè, si en té, la fracció es podria simplificar.

Factoritzem el denominador: $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, d'on podem deduir que qualsevol número que continga en la seva factorització el 2, el 3 i/o el 5, podrà simplificar-se, per la qual cosa necessitem saber quants nombres menors que 900 no són múltiples de cap d'aquests tres nombres.

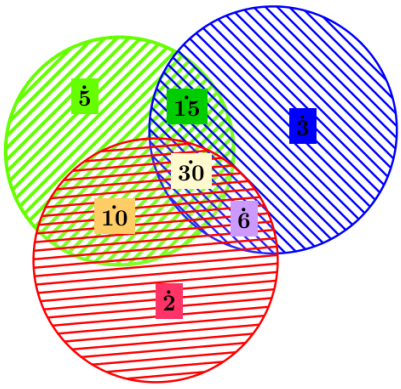
Començarem comptant quants sí que ho són. Per comoditat, els estudiarem des de l'1 fins al 900, tot i que al final el 900 no ens interessarà (i el descomptarem).

Cal tenir en compte que, si calculem els múltiples de 2 i els de 3 per separat, hi haurà números que haurem comptat dues vegades: els que són múltiples de tots dos, és a dir, de 6.

El mateix passa amb el 2 i el 5 (els de 10 estarien comptats dues vegades) i amb els de 3 i els de 5 (estarien dues vegades els de 15).

Encara n'hi ha més: els que són múltiples dels tres números, és a dir, de 30, estaran comptats tres vegades.

Ho veiem millor en un dibuix:



Per calcular quants múltiples n'hi ha de 2, tindrem en compte que de cada dos consecutius, un és múltiple de dos. De la mateixa manera, per als de tres, de cada tres consecutius un ho serà, i així successivament.

| Múltiples de | Càlcul | Total |
|---|---|---|
| 2 | $\frac{900}{2}$ | $m(2)=450$ |
| 3 | $\frac{900}{3}$ | $m(3)=300$ |
| 5 | $\frac{900}{5}$ | $m(5)=180$ |
| 6 | $\frac{900}{6}$ | $m(6)=150$ |
| 10 | $\frac{900}{10}$ | $m(10)=90$ |
| 15 | $\frac{900}{15}$ | $m(15)=60$ |
| 30 | $\frac{900}{30}$ | $m(30)=30$ |

Comptem quants números són múltiples de 2, 3 i/o 5:

$$\text{Total}=m(2)+m(3)+m(5)-m(6)-m(10)-m(15)+m(30)=$$

$$=450+300+180-150-90-60+30=660$$

Hem descomptat els múltiples de 6, 10 i 15 perquè els havíem comptat dues vegades, però, en fer-ho, els de 30, que estaven comptats tres vegades, ja no hi són, per això els sumem al final.

El que ens interessa, que són els números que no són múltiples de 2, 3 i/o 5, serà els altres, és a dir, $900-660=240$.

Per això la probabilitat demanada serà:

$$P(fracció\ irreductible)=\frac{240}{899}$$

## 28**

Separa els números 2, 4, 6, 10, 22, 25, 40 i 66 en dos grups, de manera que els productes dels números dels dos grups siguen iguals. De quantes maneres diferents es pot fer això?

Raona la resposta.

## 29



**SOLUCIÓ:**

Factoritzem cada número:

$2 = 2$ $\quad 10 = 2 \cdot 5$ $\quad 40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$

$4 = 2 \cdot 2$ $\quad 22 = 2 \cdot 11$ $\quad 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$

$6 = 2 \cdot 3$ $\quad 25 = 5 \cdot 5$

Perquè els productes dels dos grups siguen iguals, cal repartir els mateixos factors primers per igual entre els dos grups.

El factor primer 11 només apareix una vegada en dos números, 22 i 66. Això vol dir que aquests números han d'estar en grups diferents.

El mateix passa amb el factor primer 3: només apareix al 6 i al 66. Per tant, aquests dos números també han d'estar en grups diferents. Així que de moment en un grup hi ha els números 22 i 6, i, a l'altre, el 66.

Vegem el factor primer 5. Apareix quatre vegades. Hi ha dos 5 en el número 25. Això implica que el 25 ha d'estar en un grup, i els números 10 i 40 en un altre.

Considerem dos casos: quan els números 66 i 25 estan en el mateix grup i quan estan en grups diferents.

Cas 1: Grup A: 66, 25 Grup B: 6, 22, 10, 40

El grup B conté un total de sis factors 2: un del 6, un del 22, un del 10 i tres del 40.

El total de factors 2 és de $1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 0 + 3 + 1 = 10$

Per tant, per al grup A no queden més que quatre factors 2. Això vol dir que tots dos grups, definitivament, no seran iguals, ja que hi haurà més factors 2 en un grup que a l'altre. Aquest cas és impossible.

Cas 2: Els números 66 i 25 estan en grups diferents.

Aleshores: Grup A: 66, 10, 40 Grup B: 6, 22, 25

Sols queden per a repartir els números 2 i 4.

Al grup A hi ha un total de cinc factors 2. Com ja hem explicat, són deu en total. Això vol dir que els altres cinc factors 2 haurien d'estar al grup B. Per tant, obtenim l'única distribució possible:

Sols es pot fer d'una manera:

**Resposta: 66, 10, 40 i 6, 22, 25, 2, 4**

El producte és $66 \cdot 10 \cdot 40 = 6 \cdot 22 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 4 = 26\,400$

## 30*

Troba tots els números de sis xifres que compleixen:

- Contenen almenys una vegada totes les xifres imparelles. No contenen xifres parelles.
- Són múltiple de 3.
- Les dues xifres iguals són la mitjana aritmètica de les que tenen a l'esquerra i a la dreta.
- Les dues centrals formen un nombre que no és primer, i la de l'esquerra és major que la de la dreta.

**SOLUCIÓ:**

De la primera pista, les úniques xifres del número han de ser 1, 3, 5, 7 i 9, però com que no hi ha xifres parelles, una ha d'estar repetida.

Si el nombre és múltiple de 3, la suma de les sis xifres també ho ha de ser. Si sumem les cinc xifres senars diferents, obtenim:

1+3+5+7+9=25

Perquè en sumar les sis obtinguem un múltiple de 3, l'única opció possible per a la xifra que ens falta és el 5.

Així que el nostre número estarà format per les xifres 1, 3, 5, 5, 7 i 9.

Passem a la pista següent. Les dues xifres iguals són la mitjana aritmètica de les que tenen a esquerra i dreta. Com que són dues 5, la suma de les d'esquerra i dreta ha de ser 10. Això ho podem aconseguir amb l'1 i el 9 o amb el 3 i el 7. Per tant, els dos 5 han d'aparèixer d'alguna d'aquestes formes:

159, 951, 357 o 753.

La darrera pista ens diu que les dues centrals formen un número que no és primer. A més, la xifra de l'esquerra és més gran que la de la dreta. Busquem una taula amb els nombres primers de dues xifres:

Taula de nombres primers



| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Els nombres primers són els marcats en blau, de manera que les opcions per als dos centrals són:

51, 75, 91, 93, 95

Vegem, amb tota la informació que tenim, com poden ser els números:

| 1a xifra | 2a xifra | Xifres centrals | | 5a xifra | 6a xifra | Vàlid | Motiu |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 5 | 1 | | | No | No hi ha lloc on col·locar l'altre 5 entre un 3 i un 7. |
| | | 7 | 5 | 3 | | No | No hi ha lloc per col·locar l'altre 5 entre un 1 i un 9. |
| | | 9 | 1 | | | No | Un dels 5 hauria d'estar entre l'1 i el 9. |
| 1 | 5 | 9 | 3 | 5 | 7 | Sí | |
| | | 9 | 5 | 1 | | No | No hi ha lloc on col·locar l'altre 5 entre un 3 i un 7. |

Amb la qual cosa només hi ha un número que compleix totes les condicions, el 159357.