Fase Autonómica Valencia año 1999

CATEGORÍA 12 - 14 AÑOS

PROBLEMA 1. Ingenio.

Sobre una mesa hay cinco cartas:

P	Q	3	4	6

Cada carta tiene en una cara un número natural, y en la otra una letra. Joan afirma: "Cualquier carta que tenga por una cara una vocal, tiene un número par en la otra cara". Pere demostró que Joan mentía dando la vuelta solo a una carta. ¿De cual de las cinco se trata? Justifica razonadamente tu respuesta.

Solución:

Si se quiere demostrar que Joan mentía, hay que encontrar
a) una carta que tenga por una cara un número par y por la otra una consonante
o bien
b) una carta que tenga por una cara un número impar y por la otra una vocal.

Como sólo hay que girar una carta y hay cuatro cartas que hay que revisar para asegurarse la demostración según el apartado a), necesariamente hemos de acudir al apartado b) del que sólo hay un caso: la carta que muestra el número 3.

PROBLEMA 2. Geometría

Se dibujan dos rectas secantes a una circunferencia, cortándose ambas rectas en un punto P, interior a dicha circunferencia. La primera corta a la circunferencia en A y B, siendo AP = 4 cm. y BP = 6 cm. La segunda recta corta a la circunferencia en los puntos C y D, siendo CP = 3 cm. ¿Cuánto medirá DP?

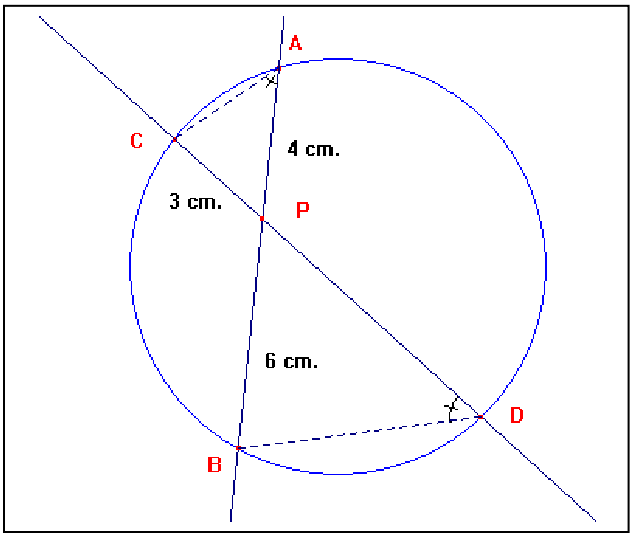
Solución:

Si unimos A con C y B con D, obtenemos los triángulos ACP y BDP que son semejantes por tener el ángulo A igual al D, por abarcar el mismo arco, y el ángulo P es opuesto por el vértice. Entonces podemos escribir

$$\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP}$$

y por tanto,

$$DP = \frac{AP \bullet BP}{CP} = \frac{4 \bullet 6}{3} = 8\,\text{cm.}$$



PROBLEMA 3. Funciones.

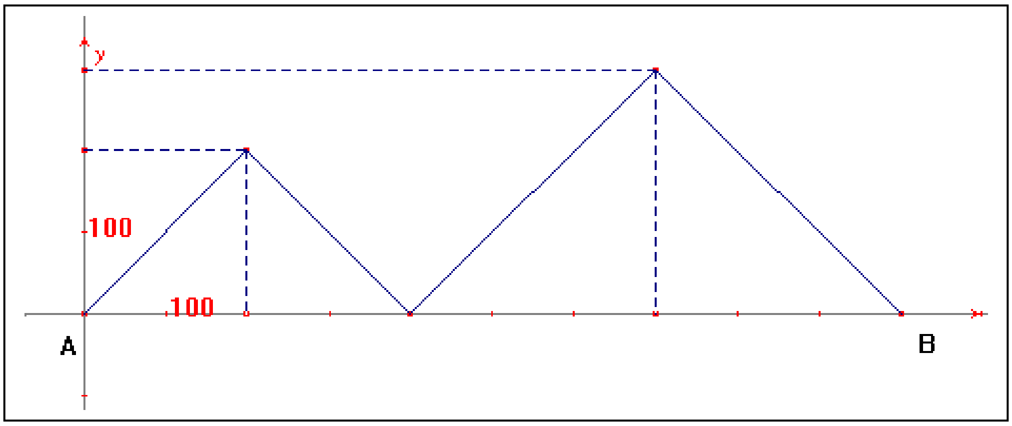
Los pájaros de la especie Pupilicci emigran de la zona A a la zona B. La distancia entre ambas zonas es de 1000 km. Suponemos que la zona A de partida corresponde al km x=0 de la ruta y la zona B de destino al km x=1000 de la ruta. Al principio y al final de la ruta se encuentran diversas fuentes de alimentación, pero a lo largo de la ruta, los pájaros sólo encuentran alimento en el km x=400.

a) Obtén y representa gráficamente la función que describe la distancia del km x de la ruta a la fuente de alimentación más cercana.

b) ¿En qué punto del recorrido se alcanza la máxima distancia a una fuente de alimento?.

Solución:

a)



b)

La máxima distancia a una fuente de alimento es de 300 Km. y se alcanza en el kilómetro 700 de la ruta.

PROBLEMA 4. Números.

Alex pensó tres números. Si los agrupa de dos en dos y los suma, obtiene 38, 44 y 52. ¿Cuales son esos números?

Solución:

Si los llamamos a, b y c, resulta que

$$a + b = 38$$
$$a + c = 44$$
$$b + c = 52$$

Si sumamos las tres ecuaciones tenemos que

$$a + b + a + c + b + c = 134$$

o sea que

$$2(a + b + c) = 134$$

y por tanto

$$a + b + c = 67$$

de donde podemos obtener el valor cada letra a partir de las tres primeras ecuaciones

$$c = 67 - 38 = 29$$
$$b = 67 - 44 = 23$$
$$a = 67 - 52 = 15$$

PROBLEMA 5. Números.

Cuando un profesor lleva corregidos los seis primeros exámenes de una clase, la nota media es de 8'4 puntos. Al corregir el séptimo, la nota media subió a 8'5 puntos. ¿Qué calificación obtuvo el examen séptimo?

Solución:

Si llamamos *S* a la suma de las notas de los seis primeros exámenes, se tiene que

$$\frac{S}{6} = 8'4$$

y por tanto,

$$S = 50'4$$

Si ahora nos dicen que *X* es la nota del séptimo examen, entonces

$$\frac{50'4 + X}{7} = 8'5$$

y por tanto,

$$X = 7 \cdot 8'5 - 50'4 = 9'1 \text{ puntos}$$

PROBLEMA 6. Geometría

Las áreas de tres caras adyacentes de un ortoedro son las que aparecen en la figura. ¿Sabrías calcular su volumen?

Solución:

Si las tres dimensiones son a, b y c, tenemos que

$$a \cdot b = 12$$
$$b \cdot c = 6$$
$$a \cdot c = 8$$

por lo que

$$a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot a \cdot c = 12 \cdot 6 \cdot 8$$

Es decir,

$$(a \cdot b \cdot c)^2 = 576$$

y así

$$a \cdot b \cdot c = 24 \text{ cm}^3.$$