Soluciones 2º Ciclo

1. Si m y n son las raíces, se tiene:

a)

$$(m+n)^2=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$$

$$(m+n)^2=\left(\frac{-2b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{a^2}$$

b)

$$m^3\cdot n^3=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^3.\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^3=\left[\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac}).(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}\right]^3$$

$$m^3.n^3=\left[\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}\right]^3=\left(\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}\right)^3=\left(\frac{4ac}{4a^2}\right)^3=\frac{c^3}{a^3}$$

c)

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}+\frac{1}{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}=\frac{2a.\left[(-b-\sqrt{b^2-4ac})+(-b+\sqrt{b^2-4ac})\right]}{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2a.(-2b)}{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}=\frac{-4ab}{b^2-(b^2-4ac)}=\frac{-4ab}{4ac}=-\frac{b}{c}$$

Otra forma:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{n+m}{m.n}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$$

2. Veamos que pasa con las potencias de 3 y de 4:

$3^2=9$ $\quad 3^6=729$ terminan en 9 las potencias de exponente múltiplos de 4+2
$3^3=27$ $\quad 3^7=2187$ terminan en 7 las potencias de exponente múltiplos de 4+3
$3^4=81$ $\quad 3^8=6561$ terminan en 1 las potencias de exponente múltiplos de 4
$3^5=243$ $\quad 3^9=19683$ terminan en 3 las potencias de exponente múltiplos de 4+1

$4^2=16$ $\quad 4^4=256$ terminan en 6 las potencias de exponente par
$4^3=64$ $\quad 4^5=1024$ terminan en 4 las potencias de exponente impar

2004 es múltiplo de 4 luego 2003^{2004} terminará en 1 y 2004^{2003} terminará en 4 por ser una potencia de exponente impar, por lo tanto $2003^{2004}-2004^{2003}$ terminará en 7 pues $11-4=7$.

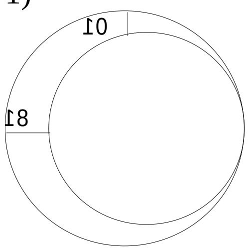
Un número par elevado a cualquier potencia siempre es un número par y un número impar elevado a una potencia cualquiera también será impar ya que al no contener a 2 en su descomposición prima tampoco lo contendrá su potencia. La diferencia entre un número par y otro impar es impar (2n-2m-1 = 2(n-m)-1). Al ser n y (n+1) dos números consecutivos uno de ellos será par y el otro impar, de donde se sigue el resultado.

3. Blanc no té el cabell ros perquè parla després de el que el té, ni tampoc blanc perquè coincideix amb el seu cognom. Per tant el té negre.

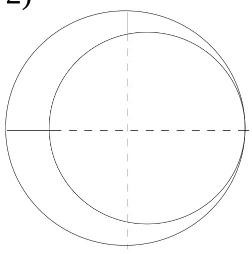
Ros no el té negre ni ros, doncs el té blanc i és la dona.

4. A les figures (1) i (2) tenim la situació inicial.
Anomenem R al radi de la circumferència exterior, r al de la interior.
L'àrea buscada és equivalent si desplacem la interior per a fer-les concèntriques.
Així veurem (3) que R = r + 9
En la figura (4) tenim que el catet horitzontal fa 9 i el vertical r – 1, com es veu millor a la figura (5).

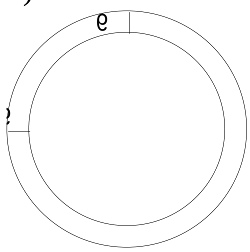
1)



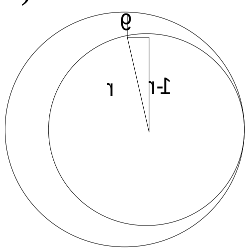
2)



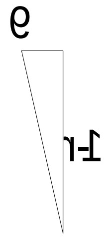
3)



4)



5)

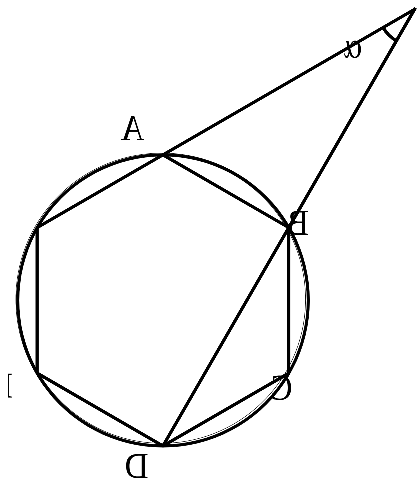


Aleshores

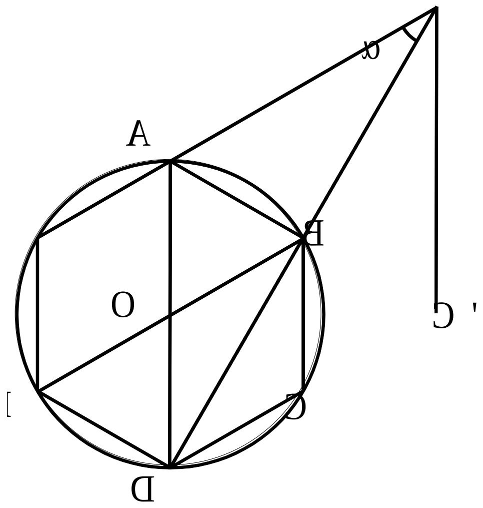
$$r^2 = (r-1)^2 + 9^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = r^2 - 2r + 1 + 81 \quad \Rightarrow \quad r = 41$$

$$R = 50 \quad \Rightarrow \quad S = \pi \cdot \left(50^2 - 41^2\right) = \pi \cdot 819$$

5. Sea dado un hexágono regular de vértices consecutivos ABCDEF . Hallar el ángulo α que forman las rectas que pasan por los vértices AF y BD



SOLUCIÓN: Sea O el centro de la circunferencia circunscrita.



Consideremos el triángulo de vértices FAO; puesto que es un triángulo equilátero $\hat{O} = \hat{A} = \hat{F} = 60^o$ y puesto que AO es paralela a A'C'tenemos que el ángulo que forman AA'C' es de 60º. Consideremos el triángulo de vértices OBD; puesto que es isósceles y el ángulo en O es el doble que el ángulo central (que es $\dfrac{360^o}{6} = 60^0$) tendremos que $\hat{B} = \hat{D} = \dfrac{180^0 - 120^0}{2} = 30^0$.
Ahora, por simetría, el ángulo que forman DBC es de 30º y puesto que BC es paralela a A'C' tenemos que el ángulo que forman BA'C' es de 30º.
Por último α es la diferencia del ángulo que forman AA'C'(60º) y el que forman BA'C'(30º). Es decir α=30º