SOLUCIONS 2005: 14-16

1. Es tracta de provar d'una manera rigorosa en quina xifra acaben les potències de 5 i les de 3 i, després sumar:
   Les successives potències de 5, $5^1, 5^2, 5^3, 5^4, \ldots$ acaben totes en 5.

n	3^n acaba en:
1, 5, 9, ...	3
2, 6, 10, ...	9
3, 7, 11, ...	7
4, 8, 12, ...	1

n	$3^n + 5^n$ acaba en:
1, 5, 9, ...	3 + 5 = 8
2, 6, 10, ...	9+ 5 = 4
3, 7, 11, ...	7 + 5 = 2
4, 8, 12, ...	1 + 5 = 6

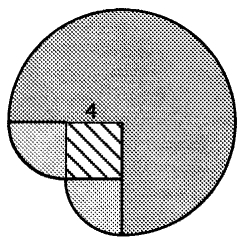
   Per tant, $3^n + 5^n$ és sempre un nombre parell.

2. L'angle 2 val 20° posat que l'angle 1 val 70º i 1+2+9=180º
   Per tractar-se d'un triangle isòsceles (dos costats són radis) els angles 4 i 5 són iguals. La suma dels angles 2, 3 i 4 és 90°, ja que l'angle total abasta el diàmetre.
   D'aquestes dues condicions s'obté que la suma dels angles 2 i 4 és igual l'angle 7. I l'angle 7 és igual a dues vegades l'angle 4. D'on l'angle 2 és la meitat de l'angle 7.
   Per tant, l'angle 7 val 40°, els angles 4 i 5 valen 20° cadascun, l'angle 6 val 140°, l'angle 3 val 50° i els angles 8 i 9 són rectes.

3. Siga *n* la fila, *i* la columna del primer quadradet de la fitxa.
   La suma del valor de les tres caselles serà:
   $$2^{n-i}\cdot 3^{i-1} + 2^{n-i-1}\cdot 3^{i} + 2^{n-i}\cdot 3^{i} = 2^{n-i-1}\cdot 3^{i-1}\cdot(2+3+6) = 2^{n-i-1}\cdot 3^{i-1}\cdot 11$$
   Busquem el valor d'aquesta expressió més aproximat a 65.000, i el trobem quan $n = 11$, $i = 7$:
   $$2^3\cdot 3^6\cdot 11 = 64.152$$
   Aleshores la primera casella de la fitxa ocupa la 11a fila, 7a columna de la piràmide i els números que ocupen les tres caselles de la fitxa són:

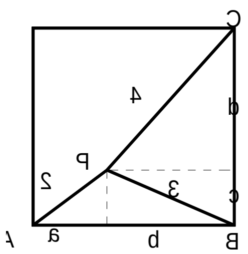
11664	17496
34992	

4. L'àrea que busquem és: 3/4 de l'àrea d'un cercle de radi 8 m i 1/2 de l'àrea d'un cercle de radi 4m.



$$S = \frac{3}{4}\pi.8^2 + \frac{1}{2}\pi.4^2 = 56\pi \ m^2$$

5. Fem el dibuix del quadrat:



$$\left.\begin{aligned} a^2+c^2 &= 2^2 \\ b^2+c^2 &= 3^2 \\ b^2+d^2 &= 4^2 \end{aligned}\right\} \text{ I també } \left.\begin{aligned} a+b &= l \\ c+d &= l \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} b &= l-a \\ d &= l-c \end{aligned}\right\},$$

De les dues primeres equacions,

$$b^2 - a^2 = 5 \quad\Rightarrow\quad (l-a)^2 - a^2 = 5 \quad\Rightarrow\quad a = \frac{l^2-5}{2l}$$

De les dues últimes,

$$d^2 - c^2 = 7 \quad\Rightarrow\quad (l-c)^2 - c^2 = 7 \quad\Rightarrow\quad c = \frac{l^2-7}{2l}$$

Però de la primera $\left(\frac{l^2-5}{2l}\right)^2 + \left(\frac{l^2-7}{2l}\right)^2 = 4 \quad\Rightarrow\quad l^4 - 20l^2 + 37 = 0$

La solució d'aquesta equació ens dóna la longitud del costat, $l = 4'2352$.
I això ens permet localitzar el punt P amb $a = 1'5273$, $c = 1'2912$.