Solucions

PROBLEMA 1.- Si a+b+c = 0 y b·c = 2. ¿Cuánto vale $b^2 + c^2 - a^2$?

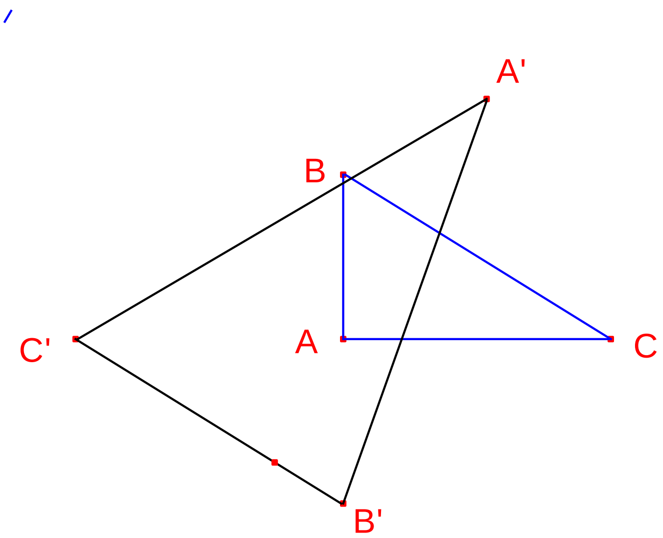
SOLUCIÓN: Tenemos:

$$(a+b+c)^2 \begin{cases} = 0 \\ = a^2+(b+c)^2+2a\cdot(b+c) = a^2+b^2+c^2+2bc+2a\cdot(-a) = a^2+b^2+c^2+4-2a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ 0 = a^2+b^2+c^2+4-2a^2 \Rightarrow\ 0 = -a^2+b^2+c^2+4 \Rightarrow\ -a^2+b^2+c^2 = -4$$

Problema 2:

El dibuix dóna la solució:



El nou triangle té la mateixa base que el primer (BC = B'C') i l'altura és triple. Aixa, l'àrea és triple.

PROBLEMA 3.- Si x = número alumnos iniciales tenemos:

$$x = u^2$$
$$x + 100 = v^2 + 1$$
$$x + 200 = t^2$$

De las dos primeras:

$$u^2 + 100 = v^2 + 1;\ \ 99 = v^2 - u^2;\ \ 3^2\cdot 11 = (v+u)\cdot(v-u)$$

Aplicamos ahora la unicidad de la factorización en primos. Caben varias posibilidades:

1. $\begin{cases} u+v=11 \\ v-u=9 \end{cases} \Rightarrow 2\cdot v=20 \ \Rightarrow$ v=10; u=1. Pero entonces x = 1 y en la tercera ecuación: $201 = t^2 \ \ \Rightarrow t=\sqrt{201} \notin \mathbb{N}$ absurdo.

2. $\begin{cases} v+u=33 \\ v-u=3 \end{cases} \Rightarrow$ v=18 $\Rightarrow$ u=15. Pero entonces x = 15^2 = 225 y en la tercera ecuación: $225+200=425=t^2 \Rightarrow t=\sqrt{425} \notin \mathbb{N}$ absurdo

3. $\begin{cases} v+u=99 \\ v-u=1 \end{cases} \Rightarrow$ v=50 $\Rightarrow u=49$. Pero entonces x = 49^2 =2401 y en la tercera ecuación: $2401+200=2061=t^2 \Rightarrow$ t=$\sqrt{2061}=51$

Por tanto el primer año hay (x =) 2401 alumnos (= 49^2). El segundo año hay (x + 100 =) 2501 alumnos (= 50^2 +1). El tercer año hay (x + 200 =) 2601 alumnos (= 51^2)

PROBLEMA 3: Anomenem *n* al nombre d'alumnes inscrits fa dos anys:

$$\left.\begin{aligned} n&=a^2 \\ n+100&=b^2+1 \\ n+200&=c^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a^2+100=b^2+1 \\ a^2+200=c^2 \end{cases}$$

$$b^2-a^2=99 \Rightarrow (b+a)\cdot(b-a)=99$$

$$c^2-a^2=200 \Rightarrow (c+a)\cdot(c-a)=200$$

De les possibles descomposicions factorials de 99 i de 200, l'única que ens compleix les condicions és:

$$\left.\begin{aligned} b+a&=99 \\ b-a&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=49\,,\, b=50\,,\, c=51$$

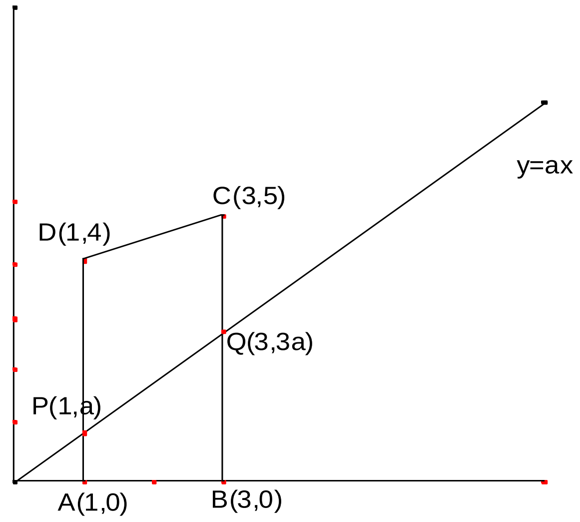
Per tant el nombre d'alumnes fa dos anys era de: 2401

PROBLEMA 4.- Asignamos a cada día de la semana un número de orden: Domingo: 0; Lunes : 1; Martes : 2; Miércoles : 3; Jueves : 4; Viernes : 5; Sábado : 6. Si el 1 de enero de un año cae en domingo (día 0) y dividimos el número de día (numerados entre 0 y 364 si el año es normal (N) y entre 0 y 365 si el año es bisiesto (B)) entre 7 nos dará un resto entre 0 y 6

	13 enero	13 febrero	13 marzo	13 abril	13 mayo	13 junio	13 julio	13 agosto	13 septiembre	13 octubre	13 noviembre	13 diciembre
N	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
B	5	1	2	5	0	3	5	1	4	6	2	1

PROBLEMA 5.

Consideremos los puntos A(1,0), B(3,0), C(3,5), y D(1,4). Hallar la ecuación de la recta que pasando por el origen divide al cuadrilátero ABCD, en dos partes de igual área



Solución: Sean P (1, a) y Q (3, 3·a) los puntos intersección de la recta y = a·x con los lados del cuadrilatero. Si [X,Y,Z,T] designa el área del cuadrilátero de vértices X , Y , Z, T tenemos:

$$[D,C,Q,P] = (\text{semisuma de bases})\cdot\text{altura} = \frac{(5-3a)+(4-a)}{2}\cdot 2 = (5-3a)+(4-a)$$

$$[A,P,Q,B] = (\text{semisuma de bases})\cdot\text{altura} = \frac{3a+a}{2}\cdot 2 = 4a$$

Queda entonces:

$$(5-3a)+(4-a) = 4a \Rightarrow 9-4a = 4a \Rightarrow a = \frac{9}{8}$$