SOLUCIÓ PROBLEMES OLIMPÍADA 2006

Problema 1:

Si la fecha es 13 del 05 de 2006 se genera el número 65321000. La operación solicitada entonces es:
$65321000 - 00012356 = 65308644 \Rightarrow \Sigma = 36 \Rightarrow \Sigma = 9$

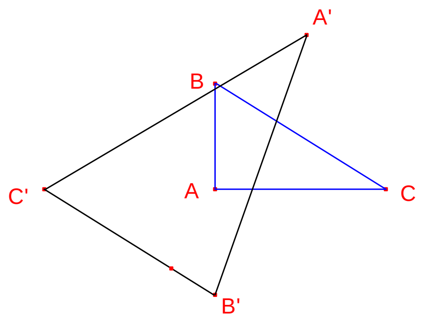
Si la fecha de nacimiento es 25 de Agosto de 1992 tendríamos generado el número 99852210. La operación solicitada es:

$99852210 - 01225899 = 98626311 \Rightarrow \Sigma = 36 \Rightarrow \Sigma = 9$

La demostración general es el hecho conocido de que si a un número se le resta el generado al invertir sus dígitos resulta un múltiplo de 9

Problema 2:

El dibuix dóna la solució:



El nou triangle té la mateixa base que el primer (BC = B'C') i l'altura és triple. Així, l'àrea és triple.

Problema 3:

Sea x la edad de Rita e y la edad de Carlos . Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{x-6}{y-6} = \dfrac{13}{11} \\ \dfrac{x-4}{y-4} = \dfrac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x\text{-}66\text{=}13y\text{-}78 \\ 6x\text{-}24\text{=}7y\text{-}28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x - 13y = -12 \\ 6x - 7y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\text{=}32 \\ y\text{=}28 \end{cases}$$

Problema 4: Los números primos son: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Sea $M = \prod_{i \in I} p_i$

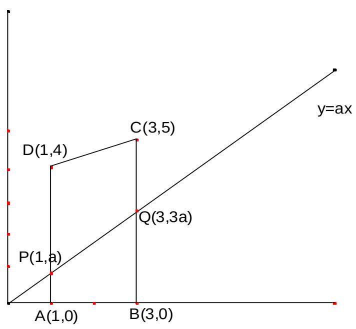
el producto pedido. En este producto están los factores 2 y 5, es decir el factor 10 por tanto el producto termina en cifra 0. La cifra de las decenas de M es la cifra de las unidades de $\frac{M}{10} = \prod_{\substack{i \in I \\ p_i \neq 2 \\ p_i \neq 5}} p_i$

Si este número terminara en cifra par tendríamos que $\frac{M}{10}$ sería divisible por dos y por tanto alguno de los p_i del último producto sería divisible por dos, lo que contradice que sean primos.

También los p_i del último producto son primos y por tanto impares. Como el producto de impares es impar, $\frac{M}{10}$ es impar por tanto termina en cifra impar.

Problema 5.

Consideremos los puntos A(1,0), B(3,0), C(3,5), y D(1,4). Hallar la ecuación de la recta que pasando por el origen divide al cuadrilátero ABCD, en dos partes de igual área



Solución: Sean P (1, a) y Q (3, 3·a) los puntos intersección de la recta y = a·x con los lados del cuadrilatero. Si [X,Y,Z,T] designa el área del cuadrilátero de vértices X , Y , Z, T tenemos:

$$[D,C,Q,P] = (\text{semisuma de bases})\cdot \text{altura} = \frac{(5-3a)+(4-a)}{2}\cdot 2 = (5-3a)+(4-a)$$

$$[A,P,Q,B] = (\text{semisuma de bases})\cdot \text{altura} = \frac{3a+a}{2}\cdot 2 = 4a$$

Queda entonces:

$$(5-3a)+(4-a) = 4a \Rightarrow 9-4a = 4a \Rightarrow a = \frac{9}{8}$$