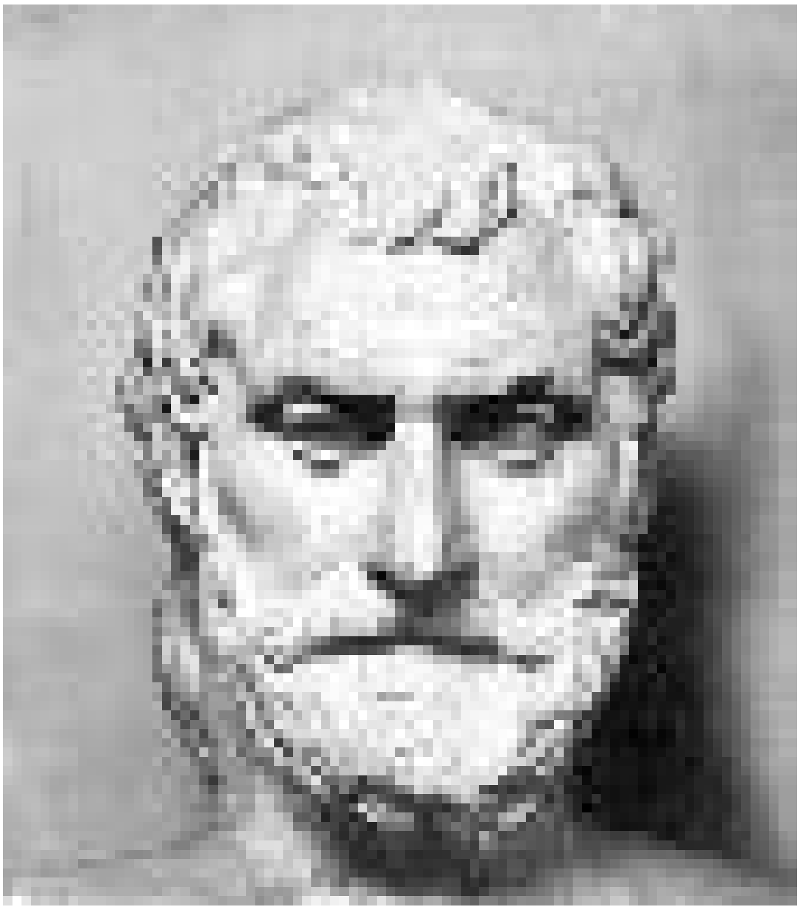
S.
E.
M.
C.
V.

AL-KHWARIZMI

PROBLEMES OLÍMPICS

Revista de problemes de Matemàtiques

Número 6.Octubre de 2000



Estimats companys, de nou reprenem la tasca de preparació de l'Olimpíada Matemàtica de Secundària, que enguany arriba a l'edició número 12. Com ja vos vàrem anunciar, un equip de treball anirà elaborant de forma periòdica un conjunt de problemes olímpics per a que els membres de la Societat disposeu d'un material amb el que treballar la resolució de problemes a la classe de matemàtiques. Si voleu col·laborar aportant problemes vostres o propostes d'activitats que tingen el perfil de les que apareixen en l'olimpíada matemàtica, ens l'envieu per correu al nostre apartat, o per correu electrònic a l'adreça valencia@semcv.org .

En aquest número vos enviem les activitats proposades en la XI Olimpíada Matemàtica de Secundària en les fases provincials d'Alacant i Castelló, així como les proposades en la Fase Autonòmica, celebrada a Castelló i Morella el passat mes de Maig de 2000. Vos recorde que els alumnes que representaren a la Comunitat Valenciana en la Fase Nacional celebrada a Catalunya, foren Antonio Romero Sangüesa, del C.P. Lope de Vega (Nules), Daniel Amoros Amat, del C. Sagrada Familia (Elda), i Mohammed Blanca Ruiz, de l' I.E.S. Ausiàs March (Manises).

Cal agrair des d'ací el treball i l'esforç realitzat per tots aquells Centres, professors i professores que, de manera desinteressada, han col·laborat en la preparació dels alumnes, o en la coordinació i desenvolupament de qualsevol de les fases de la XI Olimpíada Matemàtica. Esperem la vostra col·laboració en la nova edició.

Tomás Queralt Llopis. Coordinador Olimpíada Província de València.
Floreal Gracia Alcaine. Coordinador Olimpíada Província de Castelló.
José Luís García Valls. Coordinador Olimpíada Província d'Alacant.

XI OLIMPÍADA MATEMÀTICA
PROVINCIA D'ALACANT - FASE COMARCAL
11 DE MARÇ DE 2000 - PROVA INDIVIDUAL

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

PROVA Nº 1.- CAP I CÚES

Un número és cap-i-cua quan es llegeix igual a l'endret i a l'inrevés, és a dir, d'esquerra a dreta i de dreta a esquerra, per exemple : 27.572 ó 53.035. A la Loteria Nacional hi ha 100.000 números, del 00000 al 99.999. De tots ells, quants són cap-i-cua?

PROVA Nº 2.- PARELLS I SENARS

En aquest problema has de multiplicar números parells i imparells i observar el resultat. Es tracta de què contestes a cadascuna de les preguntes donant les raons de la teua resposta.

1. El producte de cinc números enters és parell. Quants d'eixos números són parells?
2. Tenim la mateixa situació del cas anterior però ara el resultat és imparell. És a dir, que el producte de cinc números enters és imparell. Quants d'ells són imparells?
3. Anem a fer ara un producte molt més llarg. Multipliquem 125 números enters i el producte ens resulta parell. Quants dels factors són números parells?
4. I per acabar, un producte encara més llarg. Hem multiplicat 501 números enters i hem obtingut com a resultat un número imparell. Quants d'eixos números eren imparells?

PROVA Nº 3.- UNA SITUACIÓ VERINOSA

Lancelot es trobava en la càmara del tresor del castell on habitava el Drac Negre. Allà, segons li havia contat el màgic Merlín, va trobar tres pots. També li va dir que, almenys un, contenia un fort verí i un altre una poció que el faria invencible. El tercer podria contenir una de les dues coses, és a dir poció o verí. Cadascun d'ells té una etiqueta en la qual apareix una frase:

Pot A = Un dels altres dos pots conté verí i l'altre poció.

Pot B = El pot gran conté verí.

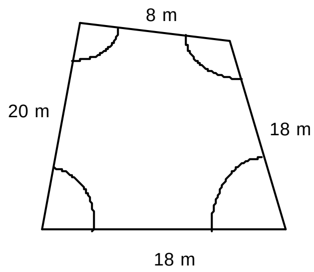
Pot C = Aquest pot conté el mateix que el gran.

i Merlín el va advertir que, en els pots que contenien verí el que deia l'etiqueta era fals, mentre que en els que havia poció l'etiqueta era vertadera.

De quin dels tres pots beuries si fores Lancelot i t'hagueres de batre immediatament amb el Drac?

PROVA Nº 4.- A - ELS JARDINS DE LA PLAÇA

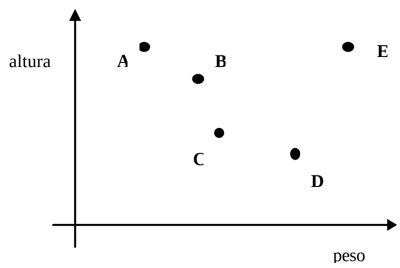
En un poble, la plaça té la forma d'un quadrilàter irregular com el de la figura. Als seus cantons hi ha quatre parterres que són sectors circulars el radi dels quals és de tres metres. L'Ajuntament ha decidit plantar gespa en ells, la qual cosa costa 1 200 pts. cada metre quadrat. Quant s'haurà de gastar?



PROVA Nº 4.- B - GRÀFIC

En el següent gràfic cada punt representa una persona. Descobreix a qui correspon cada punt sabent que:

1. Sandra i Thais són igual d'altres.
2. Hassan és més alt que Laura però pesa menys.
3. Ximo és el més baixet de tots.
4. Thais és la que més pesa.



PROVA Nº 5.- A - TIR AL BLANC

Por Presumir de certero
un tirador atrevido
se encontró comprometido
en el lance que os refiero:
Y fue, que ante una caseta
de la feria del lugar
presumió de no fallar
ni un tiro con la escopeta,
y el feriante alzando el gallo
un duro ofreció pagarle
por cada acierto y cobrarle
a tres pesetas el fallo.

Dieciséis veces tiró
el tirador afamado
y al fin dijo, despechado
por los tiros que falló:
- Mala escopeta fue el cebo
y la causa de mi afrenta,
Pero ajustada la cuenta
NI ME DEBES NI TE DEBO.
Y todo el que atentamente
este relato siguió
Podrá decir fácilmente
cuántos tiros acertó.

XI OLIMPÍADA MATEMÀTICA
PROVINCIA D'ALACANT - FASE PROVINCIAL
MONFORTE DEL CID - 1 D'ABRIL DE 2000 - PROVA INDIVIDUAL

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

1.- RECORDANT A JORGE JUAN

En 1735 el tinent de nau, Jorge Juan i Santacilia, nascut a "El Fondonet" (avui terme municipal de Novelda) i batejat a l'església de Sta. Maria del Castell de la vila de Monforte del Cid, i el tinent de nau, Antonio de Ulloa participaren en l'expedició científica al Perú organitzada per l'Acadèmia Real de Ciències de París amb l'objectiu de mesurar l'arc del meridià terrestre en Amèrica del Sud.

Després de deu anys de mesuraments científics en condicions extremes, tornen a Europa amb la dada buscada: **un grau del meridià mesura aproximadament 111 quilòmetres i 177 metres.**

Suposem que la Terra és una esfera perfecta:

a) Quina és la màxima distància a la qual es poden trobar dos punts sobre la Terra?

b) Si fóra possible un viatge al centre de la Terra, quin dia arribaria a la seua destinació una persona que començara el viatge el proper dilluns, 3 d'abril de 2000, en un vehicle perforador que avançara a 50 km per hora, 8 hores al dia, durant cinc dies a la setmana, de dilluns a divendres?

2.- LA CISTELLA DE TARONGES

Un ladrón, un cesto de naranjas,
del mercado robó,
y por entre los huertos escapó;
al saltar una valla,
la mitad más media perdió;
perseguido por un perro,
la mitad menos media abandonó;
tropezó en una cuerda,
la mitad más media desparramó;
en su guarida, dos docenas guardó.
Vosotros, los que buscáis la
sabiduría,
decidnos:
¿Cuántas naranjas robó el ladrón?

3.- EPITAFI DE DIOFANT

La història ha conservat pocs trets biogràfics de Diofant, notable matemàtic de l'antiguitat. Tot el que se sap sobre ell ha estat pres de la dedicatòria que figura al seu sepulcre:

"Caminant! Ací van ser sepultades les restes de Diofant. I els nombres poden mostrar, oh miracle!, com de llarga va ser la seua vida, la sisena part de la qual va construir la seua preciosa infància.
Havia transcorregut, a més, una dotzena part de la seua vida, quan de pèl es va cobrir la seua barba. I la setena part de la seua existència va transcórrer en un matrimoni estèril.
Va passar un quinquenni més i el va fer feliç el naixement del seu preciós primogènit, que va lliurar el seu cos, la seua preciosa existència a la terra, que va durar només la meitat que la del seu pare.
I amb pregona pena va descendir a la sepultura, havent sobreviscut quatre anys al decés del seu fill".

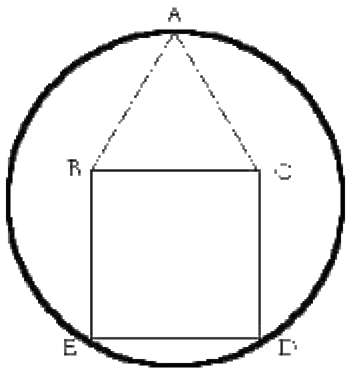
Digues: quants anys havia viscut Diofant quan li va arribar la mort? ¿A quina edat es va casar? Quants anys tenia quan va ser pare? ¿I quan va morir el seu fill?

4.- UNA BASSA QUADRADA.

Es té una bassa quadrada. Als seus vèrtexs creixen, prop de l'aigua, quatre vells roures. S'ha d'eixamplar la bassa, fent que la seua superfície siga doble, conservant la forma quadrada y sense tocar els vells roures. Com engrandir la bassa fins les dimensions desitjades, quedant els roures fora de l'aigua, a les vores de la nova bassa?

5.- BUSCANT UN RADI

ABC és un triangle equilàter i BCDE és un quadrat el costat del qual mesura 2 cm. Si la circumferència de radi r passa pels punts A, D i E com es mostra a la figura, troba justificadament el valor de r.



XI OLIMPÍADA MATEMÀTICA
PROVINCIA D'ALACANT - FASE PROVINCIAL
MONFORTE DEL CID - 1 D'ABRIL DE 2000 - PROVA PER EQUIPS

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

Cada equip realitzarà una Modalitat triada a l'atzar

MODALITAT 1

Prova A : Glorieta

1.- Les faroles que envolten la Glorieta es composen de dues parts; una base de ciment enlluïda amb manises decorades amb dibuixos geomètrics granadins i la part superior d'un tub arquejat acabant en una tulipa esfèrica.

a.- Dibuixa un croquis, indicant les mesures de la base cimentada de la farola.

b.- Calcula la superfície ceràmica total de la base cimentada.

Prova B : Col·legi de Primària

2.- El pòrtic d'entrada del C. P. "Jorge Juan" està enrajolat amb rajoles de color blanc. La llinda de forma rectangular té una amplada equivalent a una de les rajoles.

- Feu un croquis de la llinda, indicant les mesures mínimes necessàries.
- Podries estimar la superfície de les rajoles de color blanc emprades per enrajolar la llinda.

3.- Entreu al centre, travesseu el vestíbul, eixiu al porxo de columnes, pugeu per les escales del pati i entreu al gimnàs.

Utilitzant el plànol del col·legi i diversos útils de mesura; esbrina:

- L'escala a la qual s'ha realitzat el plànol.
- El perímetre i l'àrea de la parcel·la que ocupa el gimnàs.

MODALITAT 2

Prova A : Glorieta

1.- El paviment de la Glorieta està format per rajoles de forma quadrada. Cada quatre d'elles formen un octògon.

Dibuixa un croquis de quatre rajoles indicant les mesures de l'octògon.

Prenent les mesures adients calcula la superfície d'un d'ells.

Prova B: Col·legi de Primària

2.- L'alumnat de primària del C. P. "Jorge Juan" per accedir al centre diàriament per la porta principal ha de pujar uns graons.

- Féu un croquis d'ells indicant les mesures mínimes necessàries
- Podries dir-nos quina és la superfície de la part superior de cada escaló que permet col·locar amb tranquil·litat el peu per accedir al col·legi?

3.- Entreu al centre, travesseu el vestíbul i eixiu al porxo de columnes.
Utilitzant el plànol del col·legi i diversos útils de mesura; esbrineu:

- L'escala a la qual s'ha realitzat el plànol.
- L'àrea de la parcel·la del porxo, descomptant l'espai ocupat per les columnes de ciment.

MODALITAT 3

Prova A : Plaça de l'Ajuntament

1.- Prop de Monforte del Cid existeixen restes arqueològiques d'un assentament de població ibèrica, on es va trobar l'escultura d'un bou, que el podeu trobar en el replanell de les escales d'accés a l'Ajuntament. El bou es troba protegit dins d'una urna de cristall i sobre una base de fusta.

a.- Dibuixa un croquis indicant les mesures de la urna i de la base de fusta.
b.- Calcula la superfície de vidre que protegeix al bou ibèric.
c.- Calcula el volum de fusta que suporta el pes del bou.

Prova B : Col·legi de Primària

2.- El pòrtic d'entrada del C. P. "Jorge Juan" està enrajolat amb rajoles de color blanc. La llinda de forma rectangular té una amplada equivalent a una de les rajoles.

- Feu un croquis de la llinda, indicant les mesures mínimes necessàries.
- Podries estimar la superfície de les rajoles de color blanc emprades per enrajolar la llinda.

3.- Entreu al centre, travesseu el vestíbul i eixiu al porxo de columnes.
Utilitzant el plànol del col·legi i diversos útils de mesura; esbrineu:

- L'escala a la qual s'ha realitzat el plànol.
- L'àrea de la parcel·la del porxo, descomptant l'espai ocupat per les columnes de ciment.

MODALITAT 4

Prova A : Plaça de l'Ajuntament

1.- En l'escalinata d'accés a l'església es troba la **"creu dels caiguts"**. La seua base està dissenyada de manera que es troba dividida en dues seccions, tal que una d'elles, l'orientada a l'església està formada per graons en forma de sector de corona circular; i l'altra secció per un políedre de cares trapezoïdals, on estan gravades les llegendes dedicatòries.

a.- Dibuixa un croquis indicant les mesures de la base de la **"creu dels caiguts"**.

b.- Calcula la superfície lateral de la secció polièdrica on estan gravades les llegendes dedicatòries.

Prova B : Col·legi de Primària

2.- Entreu al centre, travesseu el vestíbul i eixiu al porxo de columnes.

- Feu un croquis d'una columna, indicant les mesures mínimes necessàries.
- Estimeu el volum de ciment emprat para realitzar les columnes que suporten el porxo.

3.- Entreu al centre, travesseu el vestíbul, eixiu al porxo de columnes, pugeu per les escales del pati i entreu al gimnàs.

Utilitzant el plànol del col·legi i diversos útils de mesura; esbrina:

- L'escala a la qual s'ha realitzat el plànol.
- El perímetre i l'àrea de la parcel·la que ocupa el gimnàs.

XI OLIMPÍADA MATEMÀTICA
PROVINCIA D'ALACANT - FASE PROVINCIAL
IES BAHIA DE BABEL - 8 D'ABRIL DE 2000 - PROVA INDIVIDUAL

PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

1. MOLTS ZEROS

a) Quantes xifres té el número $10^{2000} - 2000^{10}$?
b) Què sumen totes eixes xifres?

2. VOL NOCTURN

Ahir, 7 d'Abril, a les 12 hores un avió va partir de L'Altet amb destinació a l'aeroport B, on arribà hui 8 d'Abril a les 11 hores (hora local de B). Ahir a les 12 hores (hora local de B) altre avió d'iguals característiques (mateixa velocitat) deixava B per a arribar a L'Altet anit a les 11 hores.

a) Quin avió va partir cap a l'Est?.
b) Quina durada tenen els vols?.
c) A quin hora, local de L'Altet, es creuaren?

3. ÀREA I PERÍMETRE

En un triangle qualsevol:

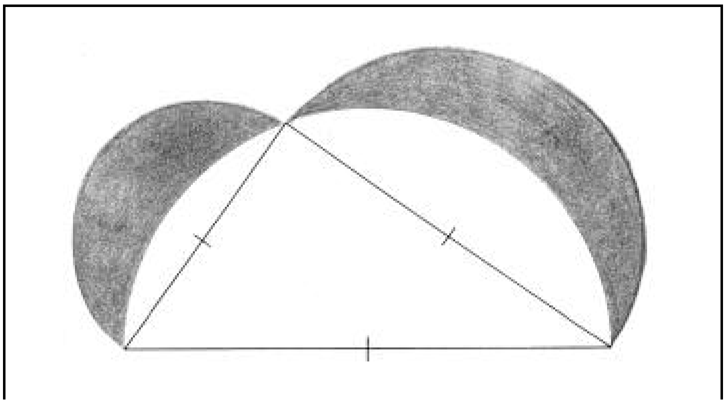
- Trobem el punt mig de l'altura **h** i tracem una circumferència de diàmetre **h**.
- Inscribim un quadrat en ella de manera que **h** siga la diagonal.
- Tombem el costat d'eixe quadrat sobre **h** (tracem un arc de circumferència prenent com radi la mesura del costat) i assenyalem el punt **p** sobre **h**
- Per eixe punt **p** tracem la paral·lela al costat de la base, que en tallar als altres costats, forma un nou triangle més menut.

a) Quina relació hi ha entre les àrees dels dos triangles?.
b) I entre els perímetres?.

4. LES LÚNULES D'HIPÒCRATES

Donat un triangle rectangle, es tracen des de els punts mitjans dels costats **b** i **c** dues semicircumferències. Així mateix, des del punt mig del costat **a,** es traça una semicircumferència que talla a les dues anteriors formant dues lúnules (figures ombrejades).

a. Expressa en funció dels costats **b** i **c** l'àrea de cada lúnula si ambdues tenen la mateixa superfície.
b. En el cas de que una tinga doble àrea que l'altra, demostra que les àrees són b·c/3 y b·c/6.



5. DEU SEGMENTS

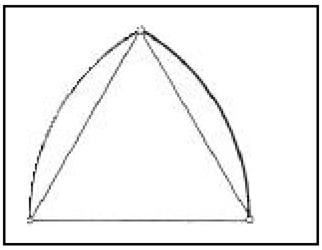
Es consideren deu segments les longituds dels quals són majors que 1 i menors que 55 cm. Serà sempre possible seleccionar tres d'ells per a construir un triangle?

XI OLIMPÍADA MATEMÀTICA
PROVINCIA DE CASTELLÓ - FASE PROVINCIAL
VILA-REAL - 6 DE MAIG DE 2000 - PROVA INDIVIDUAL

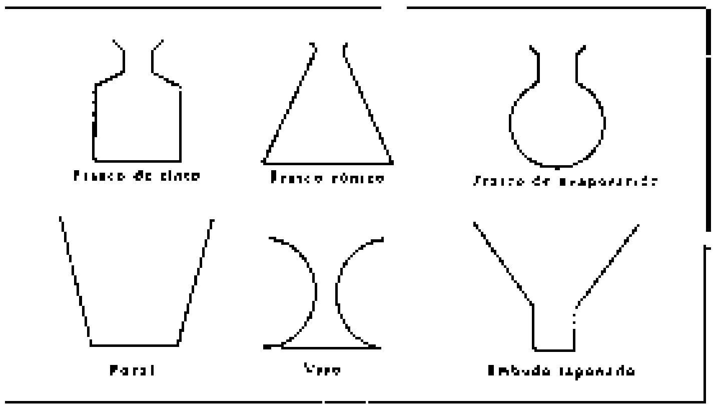
PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

PROBLEMA 1.- ARC GÒTIC

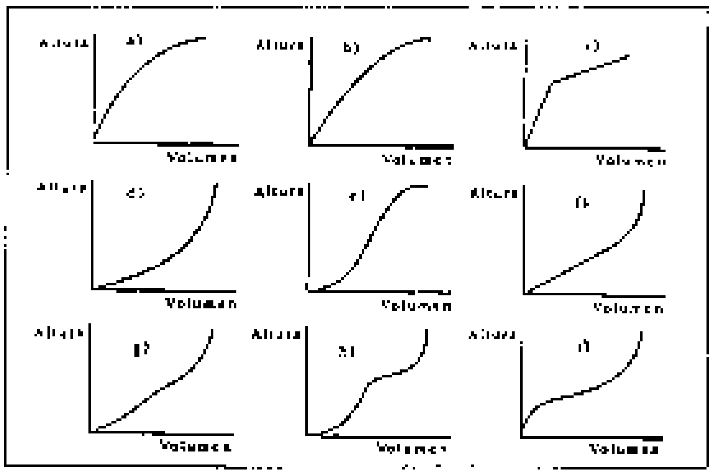
Un arco gótico está formado por dos arcos de circunferencia unidos, cada uno de ellos es igual a la sexta parte de la circunferencia. El centro de cada una de ellas está en el extremo opuesto de la anchura del arco, es decir los dos radios son iguales a la anchura del arco. Halla el área de un arco gótico de 6 m de radio.



PROBLEMA 2.- BOTELLAS Y DEPÓSITOS

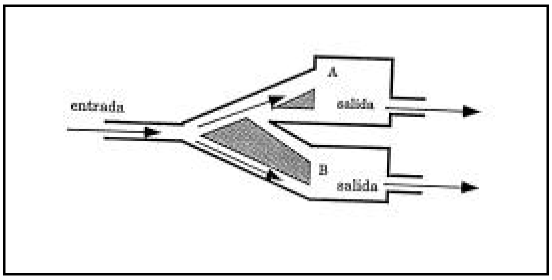


Te presentamos 6 frascos y 9 gráficas. Las gráficas representan la altura que va alcanzando el líquido en el frasco conforme este se va llenando. Elige la gráfica, que en tu opinión, mejor se acomode a cada frasco.



PROBLEMA 3.- EL LABERINTO

Este esquema representa la parte final de un laberinto que existe en un parque de atracciones. Como se observa, tiene dos salidas distintas. ¿Por cuál de ellas crees que escaparán más personas? Razona la respuesta.



PROBLEMA 4

Un número es mayor que 600 y menor que 700, la cifra de las unidades es la tercera parte de la cifra de las decenas y el número invertido es los 4/7 del primitivo, ¿Cuál es éste?

PROBLEMA 5

Tenemos un profesor de Matemáticas que no pierde oportunidad de ponernos problemas. Hace unos días hicimos un examen y ayer, al llegar, nos dijo que ya había corregido los 32 exámenes de clase, pero que se la habían olvidado en casa. Nos fastidió, y le dijimos que, por lo menos, nos dijera cuántos habíamos aprobado. Y sí que nos lo contestó, pero de forma bien rara. Nos dijo: ”No recuerdo exactamente el número; pero lo que sí me llamó la atención es que el 95% de los que han aprobado les gusta mucho el baloncesto”. Yo ya sé el número de aprobados. Tú, en cuanto lo pienses un poco, también lo sabrás

PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

PROBLEMA 1

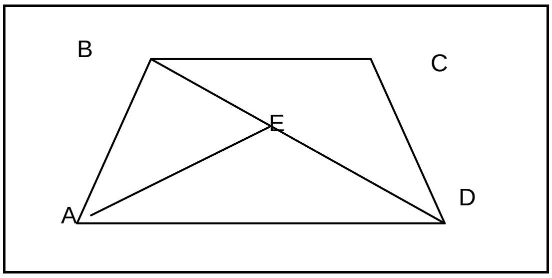
Se dispone de dos cajas iguales, que contienen, respectivamente, dos bolas blancas, tres rojas y cuatro negras, la primera, y tres blancas, cuatro rojas y cinco negras, la segunda. Se toma, al azar, una bola de cada una de las cajas. ¿Qué probabilidad hay de que se hayan conseguido del mismo color?.

PROBLEMA 2

Dos automóviles partieron al mismo tiempo de un mismo punto en una misma dirección y sentido. La velocidad del primer automóvil es de 50 Km/h y la del segundo de 40 Km/h. Después de media hora, del mismo punto y en la misma dirección y sentido parte un tercer automóvil que alcanza al primero 1'5 h más tarde que al segundo. Halla la velocidad del tercer automóvil.

PROBLEMA 3

Un terreno en forma de trapecio tiene por bases 152 m y 78 m, y ha sido comprado en 7.935.000 pts. Por tres labradores, que se reparten la finca según indica la figura:



BD es una diagonal. Si se prolonga AE pasaría por C. ¿Qué cantidad debe pagar cada labrador según su parcela correspondiente?

PROBLEMA 4

Dos hormigas circulan por un triángulo equilátero ABC. Ambas salen del vértice C a la misma velocidad. La primera circula siguiendo los lados del triángulo, pasando por los vértices A y B para volver a C; la segunda desciende por la altura correspondiente al vértice C, y asciende por la misma en sentido contrario para volver a C. Si continuaran su recorrido indefinidamente, ¿Volverían a encontrarse nuevamente en C?

PROBLEMA 5

Las funciones de oferta, $y = F(x)$ y demanda, $y = G(x)$, que determinan la cantidad (y) para un producto, en función del precio (x), son respectivamente:

$$y = x - 20 \qquad\qquad y = \frac{260.000}{x}$$

a) Encuentra el precio equilibrado (cuando la oferta y la demanda se igualan), y el correspondiente número de unidades demandadas.

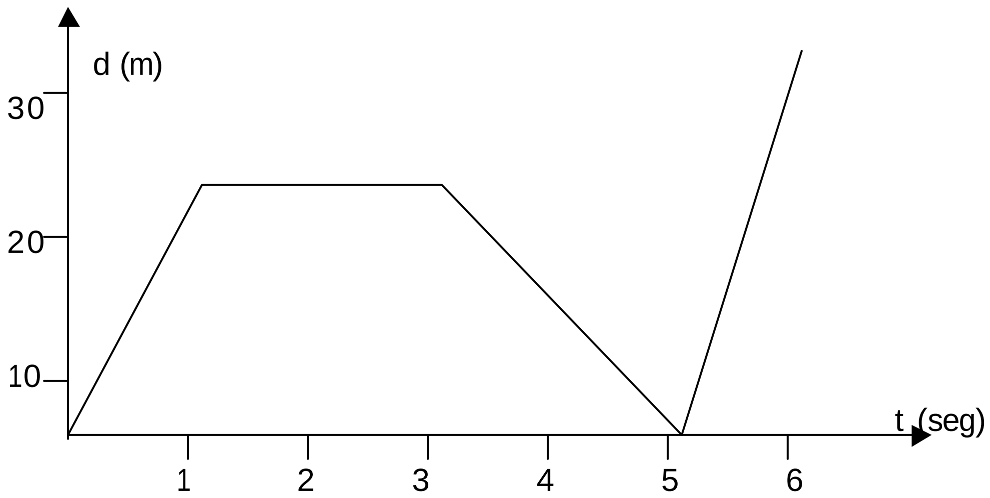
b) Dibuja las gráficas en un sistema de ejes cartesianos.

XI OLIMPÍADA MATEMÀTICA
PROVINCIA DE CASTELLÓ - FASE PROVINCIAL
VILA-REAL - 6 DE MAIG DE 2000 - PROVA DE RELLEUS

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

RELEVO 1.- TRAYECTORIA

Oscar sigue la siguiente trayectoria:



a) Completar la siguiente tabla:

t (seg)	1	2	3	4	5	6
d (m)						

b) Calcula el espacio recorrido en total.

c) Calcula la velocidad máxima obtenida por Oscar.

RELEVO 2.- CARTAS ESPAÑOLAS

Como sabes, en las cartas españolas se considera:

Figura, a la sota, al caballo y al rey.
Brisca, al As y al tres.
Números, al resto.

a) Representa gráficamente el porcentaje de estos tres grupos.

b) Calcular la probabilidad de:

* Obtener un oro.
* Obtener una figura.

RELEVO 3.- CUERPO GEOMÉTRICO

A partir del cuerpo que se muestra:

a) Indica su nombre, características y medidas.

b) ¿Qué área de lámina de plástico se necesitó para su construcción?

c) Calcula el volumen que tiene.

RELEVO 4.- EL PESO DEL AGUA

Llena un vaso con agua, viértela en el recipiente de la balanza y apunta su peso. Vierte otro vaso de agua y apunta el nuevo peso. Repite el proceso tres o cuatro veces.

Construye un gráfico con los datos obtenidos.

¿Cuál es el peso de cada vaso de agua? Indica el proceso que utilizaste para llegar al resultado.

RELEVO 5.- MONEDAS

Estima las monedas de 500 pesetas necesarias para cubrir la superficie de la mesa.

RELEVO 6.- CUADRADOS MÁGICOS

Construye cuadrados mágicos de 3 x 3.

RELEVO 7.- CUBOS

Dispones de las piezas de varios cubos: SOMA, Diabólico, Lesk, ... Construye en cada caso un cubo de 3x3x3..

RELEVO 8.- TANGRAM CHINO

Con las piezas del tangram chino, construye todos los polígonos convexos diferentes que encuentres.

PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

RELEVO 1.- PARKING

La tabla de precios del estacionamiento de la Plaza Santa Clara en Castellón es:

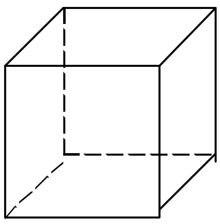
Tiempo de estacionamiento	Precio por hora de 7 a 14 horas en €	Precio en € por hora resto del día
Primera hora o fracción	0	1.5
Segunda hora o fracción	1	1.5
A partir de la tercera hora	4	1.5
Costo máximo por 24 horas	15	15

a) ¿Cuánto pagará una persona que entra a las 7:25 de la mañana y permanece en el estacionamiento hasta las 9:40? ¿Y si permanece el mismo tiempo, pero, entra a las 13 horas? ¿Y si entra a las 20:55 horas?

b) Haz el gráfico para un vehículo que entra a las 11 de la mañana y permanece en el estacionamiento durante 20 horas.

c) ¿Cuál crees que es la política del estacionamiento?

RELEVO 2.- CUBO



Si el lado del cubo mide ***l*** unidades,

a) ¿Cuánto medirá la suma de sus aristas? ¿Y su área? Calcula su volumen.

b) Construye un gráfico en el que se represente la longitud total de sus aristas, su área y el volumen (Ten en cuenta que en las ordenadas representaras el valor de cada magnitud, aunque sus unidades sean diferentes: m, m^2 y m^3).

c) Encuentra los puntos en los que:
- El valor de la longitud total de las aristas es el mismo que el valor del área.
- El valor de la longitud total de las aristas es el mismo que el valor del volumen.
- El valor del área es el mismo que el del volumen.

RELEVO 3.- CAPACIDADES

Encuentra las dimensiones de los recipientes de estas diferentes bebidas. Calcula el volumen de cada una. ¿Qué capacidad crees que le atribuyeron los fabricantes?

RELEVO 4.- PESOS

Los pesos (en kilogramos) de los 10 jugadores de baloncesto del 4º ESO son: 71, 68, 54, 60, 48, 55, 58, 71, 54, 57 y 64.

a) ¿Cuál es la media del peso del equipo?

b) Ingresa al equipo un nuevo jugador y la media pasa a ser de 59 kilogramos. ¿Cuánto pesa el nuevo jugador?

RELEVO 5.- CUADRADOS MÁGICOS

Construye cuadrados mágicos de 4 x 4.

RELEVO 6.- MAPA

Calcula la distancia entre los dos puntos marcados en el mapa.

RELEVO 7.- SÓLIDOS PLATÓNICOS

A partir del cuerpo que se muestra:

a) Indica su nombre, características y medidas.

b) ¿Qué área de lámina de plástico se necesitó para su construcción?

c) Calcula el volumen que tiene.

RELEVO 8.- CUADRADO MÁGICO

3x + 2	x - 1	4x - 2
x + 1	x + 3	2x + 3
2x	6x - 3	x

1. Escribe las sumas de cada una de las ocho líneas de este cuadrado mágico.

2. Como ves, todas las líneas no dan la misma expresión. Sin embargo, al tratarse de un cuadrado mágico, debe existir una valor de ***x*** que haga que todas esas expresiones tomen el mismo valor. Valcula el valor de ***x***.

3. Otro método para hallar el valor de ***x*** es utilizar la propiedad de los cuadrados mágicos de orden impar: *El orden del cuadrado multiplicado por el término central es igual al número mágico.* Si el número mágico de este cuadrado es 15, halla, con el término central, el valor que debe tener ***x***.

4. Este valor de x será también solución de cualquier ecuación obtenida, igualando entre sí las sumas de otras dos líneas del cuadrado. Comprúebalo.

5. Halla el cuadrado numérico correspondiente.

6. Construye cuadrados mágicos algebraicos de orden 4, 5, 6, ...

AL KHWARIZMI

XI OLIMPÍADA MATEMÀTICA - FASE AUTONÒMICA

CASTELLÓ , 27 DE MAIG DE 1999

PROVA DE CAMP EN EQUIP

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

ACTIVITAT 1: L'ESCALA

Calculeu l'escala del plànol que s'adjunta. Desenvolupeu el procediment utilitzat.

ACTIVITAT 2: COCHES

Realitzeu un recompte dels cotxes estacionats i confeccioneu un gràfic amb el resultat obtingut (cotxes, marques, ...). Inclogueu els càlculs utilitzats i justifiqueu el gràfic elegit.

ACTIVITAT 3: UNA VOLTA

Quin és el temps necessari per a donar una volta en cotxe al botànic, a la velocitat màxima permesa en el recinte? Per què?

ACTIVITAT 4: SÒLIDS PLATÒNICS

En la part sud de l'edifici de Matemàtiques estan construïts els cinc sòlids platònics. Indiqueu el nom i característica de cadascun. Calculeu les àrees laterals respectives (Inclogueu els càlculs realitzats).

PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

ACTIVITAT 1: UN BOTÀNIC EN LA UJI

Si un arbre requereix per a desenvolupar-se 4 m^2, estimeu el número màxim de arbres que es poden plantar en la zona destinada a botànic. Expliqueu la vostra conjectura.

ACTIVITAT 2: ALTURA

Estimeu l'altura del Rectorat. Justifiqueu el mètode utilitzat.

ACTIVITAT 3: APARCAMENT

Estimeu el número de cotxes que es poden aparcar en el Campus Riu Sec. Indiqueu les condicions que assumiu.

ACTIVITAT 4: DONES MATEMÀTIQUES

En l'entrada de l'Escola Superior de Ciència i Tecnologia de la UJI es tenen algun dels noms de les dones matemàtiques més importants. Doneu algunes dades biogràfiques de tres d'elles, incloent-hi un breu currículum.

XI OLIMPÍADA MATEMÀTICA - FASE AUTONÒMICA

MORELLA, 28 DE MAIG DE 1999

PROVA INDIVIDUAL

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

PROBLEMA 1

La combinació de una caixa de cabdals és una sèrie creixent de tres xifres no nul·les, que a més a més te les dues següents indicacions:

- La suma de les seues xifres és 17.
- El producte de dues qualsevol d'elles augmentat amb el tercer és un quadrat perfet.

Quina és la combinació de la caixa?

PROBLEMA 2

En un poble Valencià van a instal·lar una font amb un sortidor d'aigua. Per a que no hi haja molta despesa d'aigua, el mecanisme permet que l'aigua isca i torne al dipòsit per a ser novament impulsada a l'exterior.

El dipòsit té una capacitat de 200 litres, tarda 10 minuts en omplir-se, i després, durant 4 minuts, l'aigua és expulsada l'exterior.

a) Si el dipòsit està buit, quina quantitat d'aigua hi haurà en el dipòsit als 2 minuts? I als 12 minut?

b) Fes una gràfica en la que es relacione la quantitat d'aigua que hi ha en el dipòsit amb el temps, per a un període de mitja hora.

c) Cada quant de temps es repeteix la forma de la gràfica?

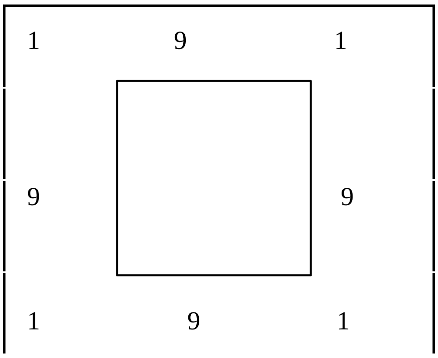
Nota: Pren el temps en l'eix de les abscisses i la quantitat d'aigua en el de les ordenades.

PROBLEMA 3

Si als dos termes d'una fracció irreduïble se li suma el denominador i a la fracció resultant se li resta la de partida, s'obté de nou aquesta. De quina fracció es tracta?

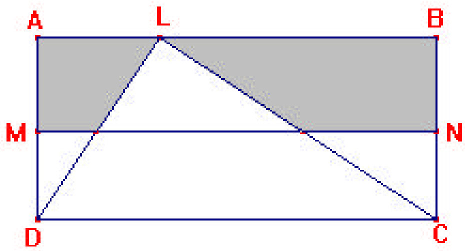
PROBLEMA 4

Els 40 xiquets que participaven en un camping decidiren vigilar el recinte distribuïts com s'indica en la figura. Arribada la nit, se'n anaren a dormir quatre xiquets durant el transcurs de cadascuna de les primeres 4 hores i dos xiquets durant la quinta i última hora de vigia, però sempre, després de cada hora, 11 xiquets vigilaven cada costat del camping. Com es distribuïren?



PROBLEMA 5

ABCD és un rectangle on la mesura d'**AB** és el doble de la mesura de **BC**; **L** és un punt qualsevol del segmento **AB**, **M** i **N** són els punts mitjos dels segments **AD** i **BC** respectivament. Si el perímetre de **ABCD** és 144 cm., trobar l'àrea de la regió ombrejada.



PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

PROBLEMA 1: CABLE

Una habitació mesura 10 m de llarg, 4 d'ample i 4 m d'alt. En el punt A, a mig metre del sol i en meitat de la paret, hi ha un endoll. Si hem de connectar l'endoll amb una bombeta situada en B, que està a mig metre del sostre i en meitat de la paret d'enfront, quina és la mínima quantitat de cable que s'utilitzarà? (El cable no es pot utilitzar per l'aire)

PROBLEMA 2: EL SORTEIG DE LA MILI

En una illa hi ha un xicotet exercit; tan menut que sols hi ha onze places de soldat per als dotze candidats (quints). Per tant es fa un sorteig per a elegir aquell que no farà el servei militar.

- El sorteig s'organitza amb els números de l'1 al 12:

01 – 02 – 03 – 04 – 05 – 06 – 07 – 08 – 09 – 10 – 11 - 12

- S'elegeix un número, de l'un al dotze, traient les dues xifres (desenes i unitats) de uns bombos segons s'indica:

Las desenes s'extrauen del bombo A que conté dues boles, una amb el número 0 i altra amb l'1. Hi ha dos bombos (B i C) per a les unitats: Si en les desenes ix l'1, es treu la bola de les unitats del bombo B que conté els números 0, 1 i 2. Si en les desenes ix el 0, es treu la bola de les unitats del bombo C que conté els números de l'1 al 9.

Qui té més possibilitats de ser elegit? És just el sorteig?

PROBLEMA 3: EL TRIANGLE ISOSCELES

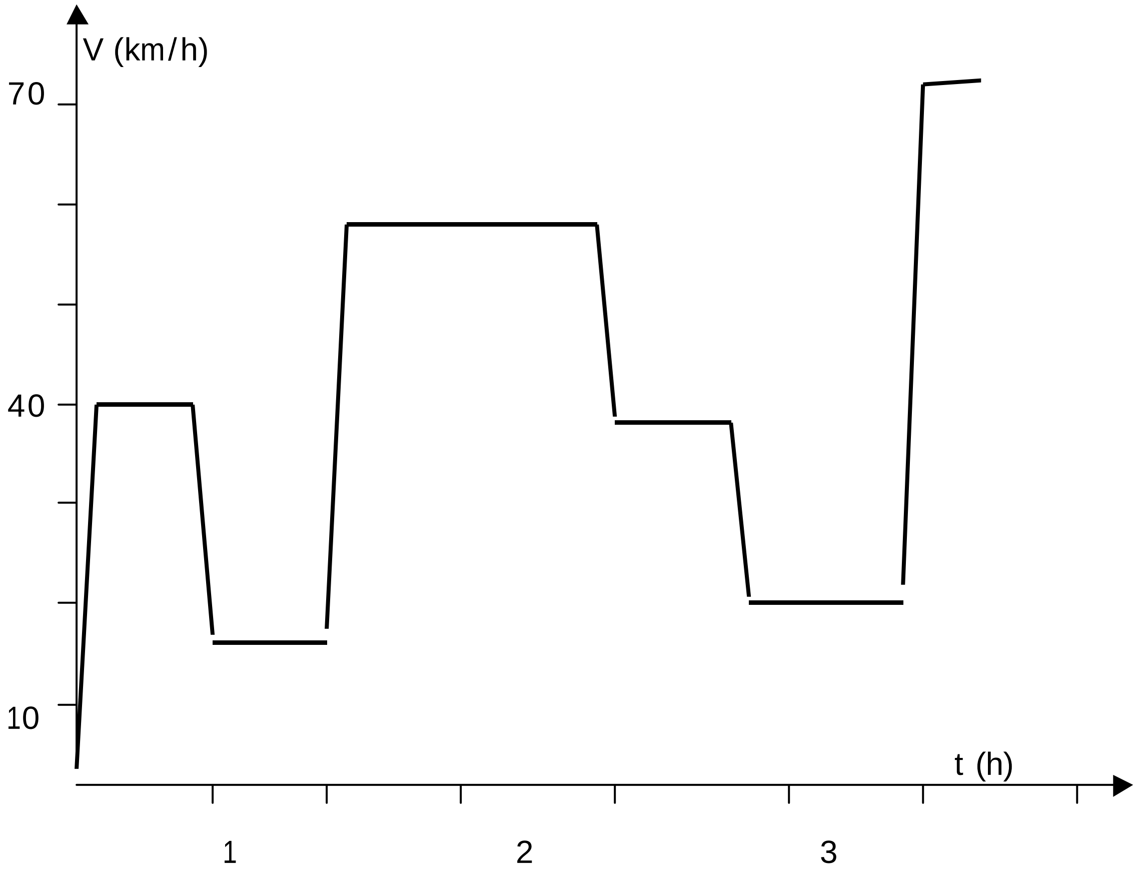
D'un triangle rectangle me diuen que la seua àrea és 1/4 del quadrat de la hipotenusa. Demostra que, en eixe cas, el triangle es isòsceles.

PROBLEMA 4: FESTA

Sara va invitar a 17 persones a la seua festa. Assignà a cadascun un número del 2 al 18, guardant-se l'1 per a ella. Quan tots estaven ballant, Sara se va adonar de que la suma dels números de cada parella era un quadrat perfet. Quin era el número del company de Sara?

PROBLEMA 5: VOLTA CICLISTA

La gràfica de la velocitat d'un ciclista al llarg d'una etapa és:



Fes una representació gràfica del perfil de l'etapa, és a dir, l'altura en funció de la distància (en km) recorreguda.

XI OLIMPÍADA MATEMÀTICA
PROVINCIA D'ALACANT - FASE COMARCAL
11 DE MARÇ DE 2000 - PROVA INDIVIDUAL

-----------------------SOLUCIONS-------------------------

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

PROVA Nº 1.- CAP I CÚES

Este problema es resol per recompte, el que exigeix mantenir cert ordre per a que no se'ns oblide cap. Així els cap-i-cues que comencen per 0 són de la forma **"0 a b a 0"**, a pot ser 0, 1, 2... , 9 (10 casos) i per cadascun d'ells, per exemple **"0 1 b 1 0",** b pot ser qualsevol número 0,1, ... ,9 (10 casos). Aleshores hi ha 10 x 10 = 100 cap-i-cues que comencen per zero. I seguint un raonament similar per als cap-i-cues que comencen per 1, 2, ..., 9 s'arriba a la conclusió de que **hi ha 100 x 10 = 1.000 cap-i-cues**

PROVA Nº 2.- PARELLS I SENARS

1. Ha d'haver al menys un número parell entre els cinc números ja que el producte d'un número parell per altre número és sempre parell.
2. Pel mateix motiu que en el cas anterior, han de ser tots els números senars.
3. Al menys un. El motiu és el mateix.
4. Tots han de ser senars.

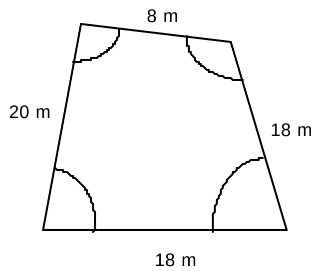
PROVA Nº 3.- UNA SITUACIÓ VERINOSA

Anem a veure què passaria en suposar que cadascun dels flascons fora de poció:

- Si A conté poció, implica que l'etiqueta diu la veritat, aleshores el B té verí, i per tant el C no es contradiu. A i C tenen poció.
- Si B te poció, diu la veritat, aleshores el flascó A te verí i menteix, així que el C hauria de tenir verí i per tant mentir; això es contradiu amb el contingut que hem dit que te A.
- Si el C te poció, no es troba contradicció.

Així doncs, hauries de beure de l'A o del C.

PROVA Nº 4.- A - ELS JARDINS DE LA PLAÇA



Se basa en que la suma dels angles d'un quadrilàter és sempre 360º , aleshores la superfície correspon a un cercle de radi 3 m.

$A = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 28'26\ m^2$.

Així que la despesa serà de 28'26 x 1.200 = 33.912 pts

PROVA Nº 4.- B - GRÀFIC

***A* =** Sandra ***B* =** Hassan ***C* =** Laura ***D* =** Ximo ***E* =** Thais

PROVA Nº 5.- A - TIR AL BLANC

Sis tirs encertats i deu fallats.

XI OLIMPÍADA MATEMÀTICA
PROVINCIA D'ALACANT - FASE PROVINCIAL
1 D'ABRIL DE 2000 - PROVA INDIVIDUAL
-----------------------SOLUCIONS-------------------------

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

1.- RECORDANDO A JORGE JUAN

a) En grados, la máxima distancia a que se pueden encontrar dos puntos sobre una superficie esférica es 180º. Por lo tanto 180 x 111,177 = 20011 Km. y 860 metros

b) La distancia al centro de la Tierra es el radio de la esfera. Como media circunferencia máxima mide 20011,86 Km, el radio de la Tierra será $\frac{20011.86}{p}$ aproximadamente a 6369 Km 972 metros. A un ritmo de 50 Km. por hora, necesitaría pues 127,39 horas, esto es llegaría durante la hora 128 del viaje. Viajando 8 horas al día la persona necesitaría 16 días. Como viaja 5 días a la semana, son necesarias 3 semanas completas y un día. Como empieza su viaje el lunes 3 de abril, llegaría al centro de la Tierra el lunes 24 de abril de 2000.

2.- EL CESTO DE NARANJAS

Resolvemos el problema empezando por el final: Desparramado al tropezar con la cuerda: $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ se ha quedado: $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=24$ x - 1 = 48 x = 49

Tenía antes de tropezar con la cuerda 49 naranjas.

Perseguido abandona: $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ Se ha quedado: $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=49$ x + 1 = 98 x = 97

Al saltar pierde: $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ Se ha quedado: $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=97$ x - 1 = 194 x = 195

Por lo tanto, en el cesto había ciento noventa y cinco naranjas.

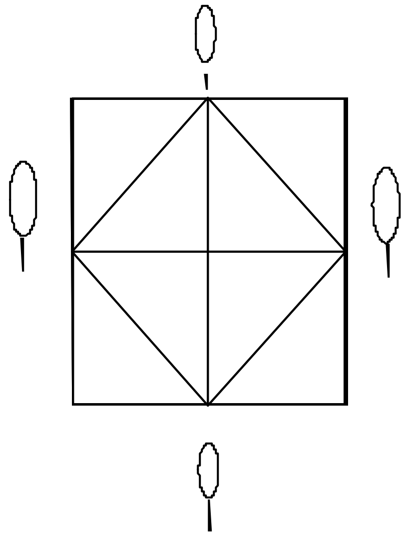
4.- EPITAFIO DE DIOFANTO

Llamando x a la edad de Diofanto, debemos resolver la ecuación:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \qquad x = 84 \text{ años vivió.}$$

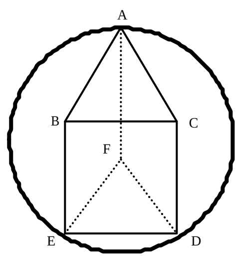
A los 21 se casó. A los 38 fue padre. A los 80 perdió a su hijo.

4.- UN ESTANQUE CUADRADO



En la figura adjunta se muestra cómo hay que hacerlo. Los robles deben quedar frente al punto medio de los lados del nuevo cuadrado. Para esto no hay más que trazar las diagonales en el estanque viejo y calcular los triángulos que se forman al hacer esto. Fácilmente deducimos que son iguales.

5.- BUSCANDO UN RADIO



Se considera un punto F en el interior del cuadrado, tal que el triángulo FED sea un triángulo equilátero. Como EF = FD = DE = 2 cm y CD // AF por ser AC y FE paralelas y de igual longitud, 2 cm. Así pues, AF = DC = 2 cm y F es el centro de la circunferencia.

(FA = FE = FD = 2 cm) de radio r = 2 cm.

XI OLIMPÍADA MATEMÀTICA
PROVINCIA DE CASTELLÓ - FASE PROVINCIAL
VILA-REAL - 6 DE MAIG DE 2000 - PROVA INDIVIDUAL
------------------------SOLUCIONS-------------------------

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

PROBLEMA 1.- ARC GÒTIC

Área del arco = $\frac{\pi \cdot r^2}{6} = \frac{\pi \cdot 6^2}{6} = 6\pi$

Área del triángulo = $\frac{l \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{6^2 - 3^2}}{2} = 9\sqrt{3}$

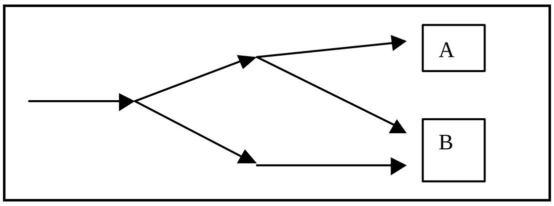
Área del arco gótico= $6\pi + (6\pi - 9\sqrt{3}) = 12\pi - 9\sqrt{3} \cong 22.11\ m^2$

PROBLEMA 2.- BOTELLAS Y DEPÓSITOS

Frasco de tinto	f)	Frasco cónico	d)
Frasco de evaporación	i)	Pozal	a)
Vaso	e)	Embudo taponado	b)

PROBLEMA 3.- EL LABERINTO

Por la salida **B** ya que se puede llegar por dos caminos diferentes, mientras que a la salida **A**, solo por uno.



PROBLEMA 4

Un número entre 600 y 700 será: 600 + 10 x + y

Si: y = x/3 (x = 3y)

$100y + 10x + 6 = \frac{4}{7}(600 + 10x + y)$

7(100y + 10(3y) +6 = 4(600 + 10(3y) + y)

786y = 2358

y = 3 x = 9 Luego el número buscado es el 693.

PROBLEMA 5

Si al 95% de los aprobados les gusta el baloncesto, el 95% del número buscado debe ser natural. Si descomponemos 95 se tiene: 95 = 5 . 19

Luego 0.95debe ser multiplicado por un número que termine en cero y su decena sea par. Esta condición solo la cumple el 20, luego aprobaron veinte estudiantes y a 19 les gusta el baloncesto.

PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

PROBLEMA 1

Para que ambas bolas extraídas sean del mismo color, deben ser: BB, RR ó NN, luego:

P(mismo color) = P(BB) + p(RR) + p(NN) = $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{12}+\frac{3}{9}\cdot.\frac{4}{12}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{12}=\frac{19}{54}$

PROBLEMA 2

t=0 v=50 Km/h t=x

t=0 v=40 Km/h t=x-1.5

t=0.5 v t=x-1.5-0-5 t=x-0.5

Si $e = v.t$, al encontrarse el primer y el tercer automóvil habrán recorrido:

50x = v(x - 1.5)

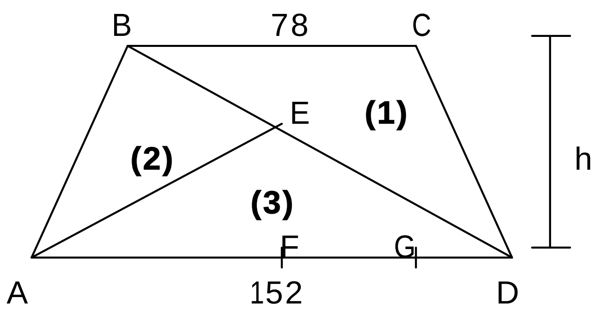
Al encontrarse el segundo con el tercer automóvil, ambos habrán recorrido:

40(x - 1.5) = v(x - 1.5 – 0.5)

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene: x = 3, v = 60.

Luego la velocidad del tercer automóvil es de 60 Km/h.

PROBLEMA 3



$$\frac{\overline{CG}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} \Rightarrow \frac{h}{\overline{EF}}=\frac{(\frac{152-78}{2})+78}{\frac{115}{2}} \Rightarrow \overline{EF}=\frac{76}{115}h$$

Área del trapecio: $\frac{\overline{AD}+\overline{CB}}{2}h=\frac{(152+78)}{2}h=115h$

Área (1) = $\frac{\overline{BC}\cdot h}{2}=\frac{78\cdot h}{2}=39h$

Área (3) = $\frac{\overline{AD}\cdot\overline{EF}}{2}=\frac{152\cdot\frac{76}{115}h}{2}=\frac{5776}{115}h$

Área (2) = Área del trapecio – Área (1) – Área (3) = $115h-39h-\frac{5776}{115}h=\frac{2964}{115}h$

Las cantidades a pagar serán:

(1) = $\frac{39h}{115h}\cdot 7935000=2691.000$ pesetas.

(2) = $\frac{\frac{2964}{115}h}{115h}\cdot 7935000=1778400$ pesetas.

(3) = $\frac{\frac{5776}{115}h}{115h}\cdot 7935000=3.465000$ pesetas.

PROBLEMA 4

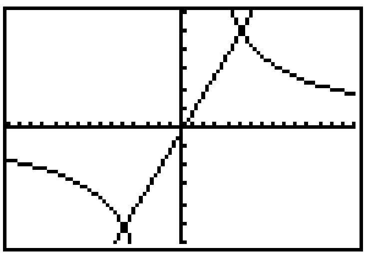
Siendo que para cualquier valor del lado del triángulo equilátero, la altura es un número irracional, nunca volverán a encontrarse.

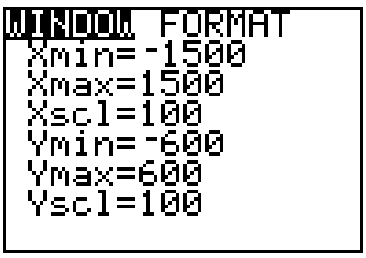
PROBLEMA 5

a) $x-20=\frac{260000}{x} \Rightarrow x^2-20-260000=0 \Rightarrow x_1=520, x_2=-500$

Luego el precio debe ser de 520 y la cantidad de 500 unidades.

b)





XI OLIMPÍADA MATEMÀTICA - FASE AUTONÒMICA

MORELLA, 28 DE MAIG DE 1999

PROVA INDIVIDUAL

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

PROBLEMA 1

Descomponemos el número 17 en suma de tres sumandos en orden creciente:

1 7 9 2 6 9 3 5 9 2 7 8 3 6 8 4 6 7

De todas estas descomposiciones sólo la primera verifica que el producto de dos de sus cifras más la tercera es un cuadrado perfecto:

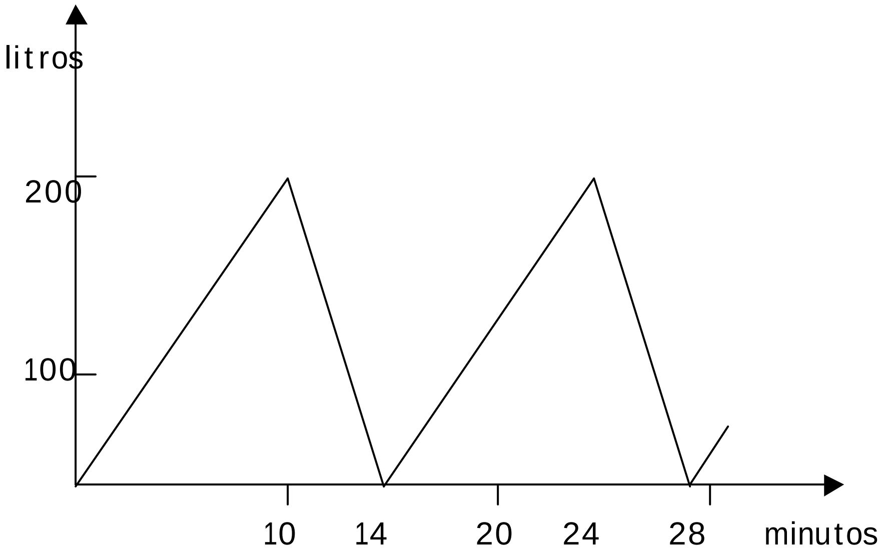
$$1 \times 7 + 9 = 16$$
$$1 \times 9 + 7 = 16$$
$$7 \times 9 + 1 = 64$$

Luego la combinación es 179.

PROBLEMA 2

a) A los 2 minutos tendrá 40 litros, y a los 12 minutos 200 – (200 / 4 x 2) = 100 litros.

b)



Se supone que el agua entra con velocidad constante: 200 / 10 = 20 litros/minuto y sale a velocidad 200 / 4 = 50 litros/minuto.

Si no se considera esto, no deben ser trozos rectilíneos.

c) Cada 14 minutos.

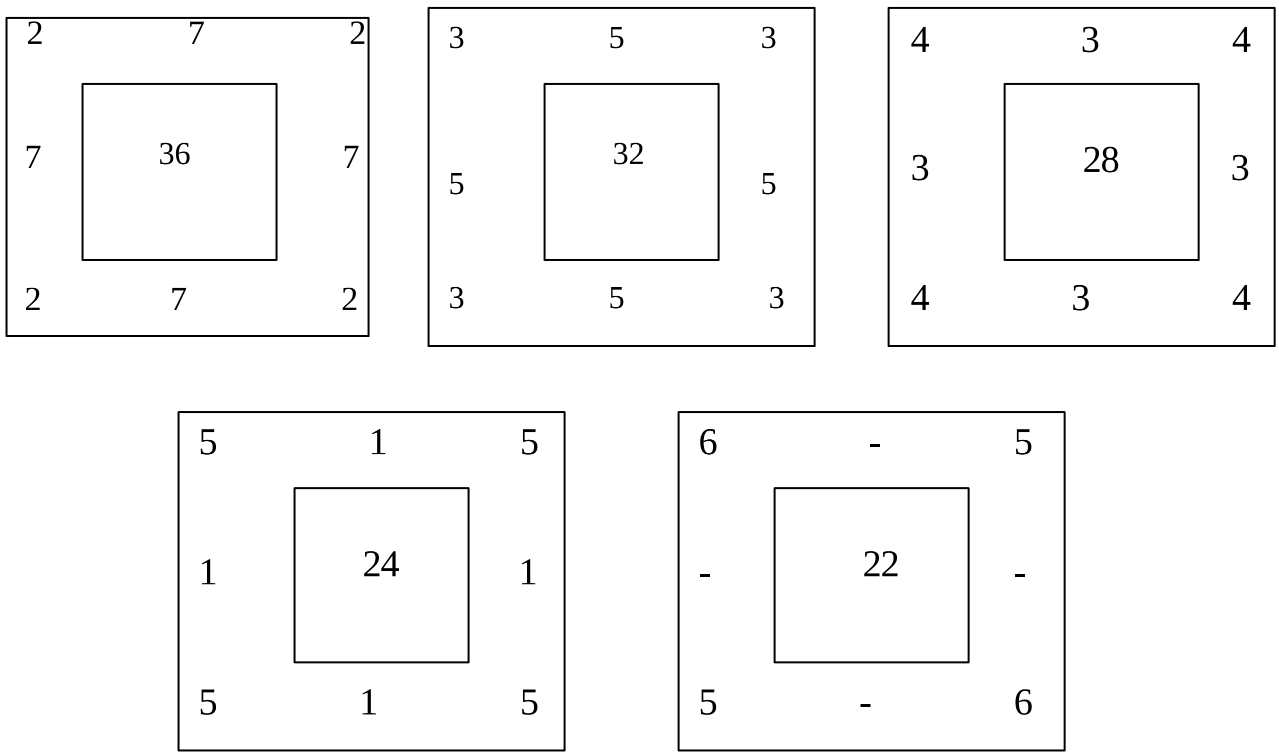
PROBLEMA 3

Sea $\frac{x}{y}$ una fracción tal que su m.c.d.(x,y) = 1, esto es, irreducible. Entonces:

$$\frac{x+y}{2y}-\frac{x}{y}=\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x+y-2x=2x \quad \Rightarrow \quad y=3x$$

Como m.c.d.(x,y) = 1, ha de ser: $\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$

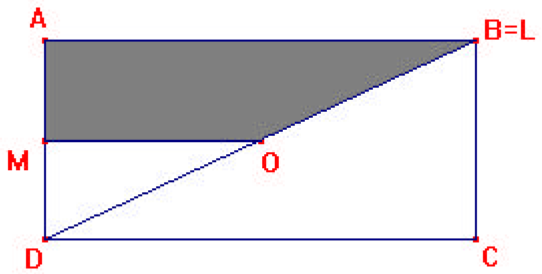
PROBLEMA 4



PROBLEMA 5

Si el perímetro del **ABCD** es 144 cms, resulta que tiene 48 cms de largo y 24 cms de alto. El triángulo **DLC** siempre tiene altura 24 cms (para cualquier **L**), por lo que su área sera:

$$\frac{48 \bullet 24}{2} = 576\, cm^2$$



Si hacemos coincidir **L** con **B**, el área de la región sombreada será la del cuadrilátero **AMOB**, donde **O** será el punto medio de **BD**. Tenemos entonces que el área en cuestión es la diferencia entre la de los triángulos **ABD** y **MDO**, es decir:

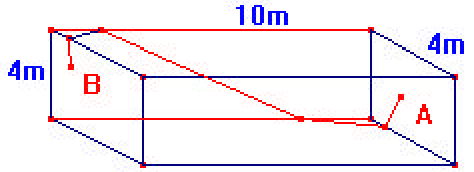
$$\frac{48 \bullet 24}{2} - \frac{24 \bullet 12}{2} = 576 - 144 = 432\, cm^2$$

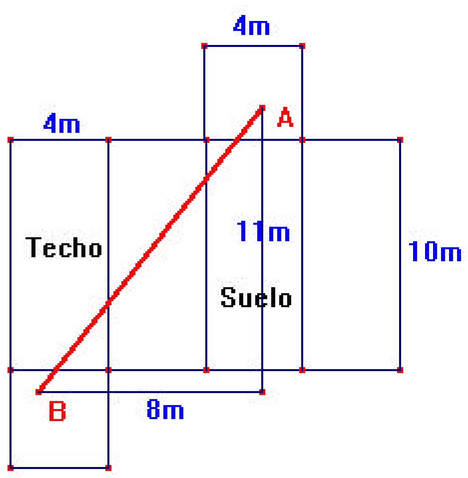
O sea que el área de la región sombreada es 432 cm^2.

PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

PROBLEMA 1: CABLE

La distancia mínima entra **A** y **B** es la mostrada en el desarrollo del prisma. Por el teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{8^2 + 11^2}$, es decir, *d* = 13 m con 60 cm





PROBLEMA 2: EL SORTEIG DE LA MILI

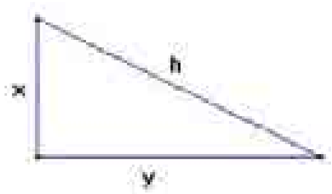
La probabilidad de que salga un 10, 11 ó 12 es $\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0.16667$

La probabilidad de que salga un número entre el 1 y el 9 es $\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{9} = \frac{1}{18} = 0.0556$

El sorteo no es justo por que los números de dos cifras tienen mayor probabilidad de ser elegidos que los números de una cifra.

PROBLEMA 3: EL TRIANGLE ISOSCELES

Si a los catetos les llamamos **x** e **y**, tenemos:



$$A = \frac{1}{4} h^2$$

$$\frac{x \bullet y}{2} = \frac{h^2}{4} \Rightarrow h^2 = 2xy$$

Como $h^2 = x^2 + y^2$, entonces:

$$x^2 + y \quad = 2xy \Rightarrow x^2 + y \quad - 2xy = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 0$$

Por tanto x = y, lo que demuestra que es un triángulo isosceles.

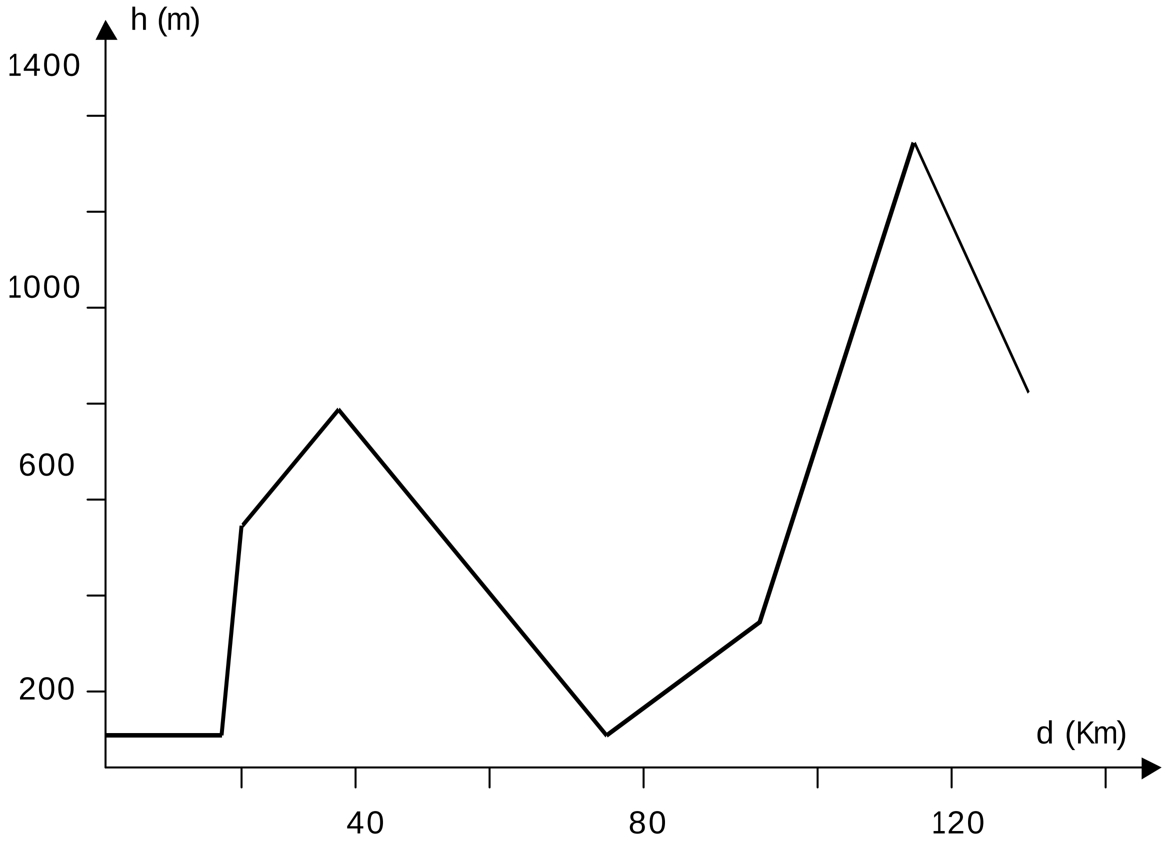
PROBLEMA 4: FESTA

Sara va invitar a 17 persones a la seua festa. Assignà a cadascun un número del 2 al 18, guardant-se l'1 per a ella. Quan tots estaven ballant, Sara se va adonar de que la suma dels números de cada parella era un quadrat perfet. Quin era el número del company de Sara?

PROBLEMA 5: VOLTA CICLISTA

Tendremos en cuenta que la pendiente es inversamente proporcional a la velocidad, luego a menor pendiente, mayor velocidad y si tenemos pendiente negativa (bajada, se tendrá una máxima velocidad.

La gráfica muestra una posible solución



Societat d'educació matemàtica

Al-Khwarizmi

Comunitat Valenciana

Visiteu la nostra pàgina web: www.semcv.org

S.
E.
M.
C.
V.

AL-KHWARIZMI

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"