S.
E.
M.
C.
V.
AL-KHWARIZMI

PROBLEMES OLÍMPICS

Revista de problemes de Matemàtiques
Número 76. Octubre 2014

GALERIA DE FOTOS PARTICIPANTS AL XIV CONCURS DE FOTOGRAFIA "MATEMÀTICA A LA VISTA"

"El nou caragol".
David Arnal. CC Mare de Déu de l'Olivar (Alaquàs)

"Historia infinita".
Arturo García. IES Ramón Llull (València)

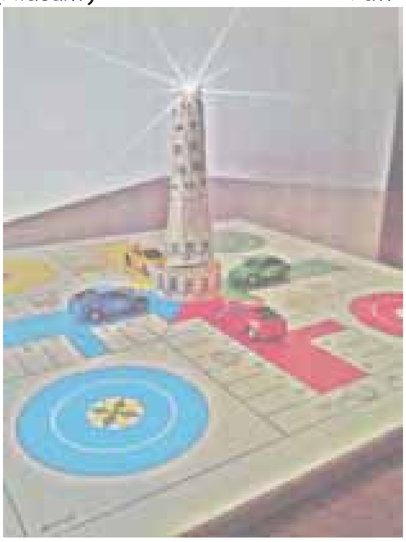
"Sol de cuadrados"
Laura Pérez. IES Maria Moliner (Port de Sagunt)

"Reflejo de círculos infinito"
Laurenci Lluch. IES María Moliner (Port de Sagunt)

"Espiral gasterópoda sobre paral·leles"
Maëla Sanmartin. IES Jaime II (Alacant)

"Dos ruedas tangentes".
Patricia Sánchez. IES L'Estació (Ontinyent)

"Perspectiva d'un cercle".
Iván Tortosa. IES Jaime II (Alacant)



"Nos conducimos con los números".
Paula Lorente. CC Mare de Déu de l'Olivar (Alaquàs)

"Espiral".
Alex Fuentes. IES L'Arabí (L'Alfàs del Pi)

Ací teniu el número 76 de **PROBLEMES OLÍMPICS** corresponent al mes d'octubre de 2014. El present exemplar inclou les proves proposades en la Fase Autonòmica de la XXV Olimpíada Matemàtica celebrada al complex educatiu de Xest els dies 31 de maig i 1 de juny de 2014. Els tres primers alumnes classificats de cada nivell foren:

NIVELL A (Primer cicle d'ESO)		
FRANCISCO SOSPEDRA ESCAT	COLEGIO DOMUS	GODELLA
FÉLIX MORENO PEÑARRUBIA	IES L'ELIANA	L'ELIANA
PABLO GÓMEZ TORIBIO	IES THÁDER	ORIHUELA
NIVELL B (Segon cicle d'ESO)		
ALBERTO RIUS POVEDA	IES VICENT CASTELL	CASTELLÓ
RAFAH HAJJAR MUÑOZ	IES CAMP DE TURIA	LLÍRIA
TONY VITAS ORTEGA	COLEGIO SAGRADA FAMILIA	ELDA
NIVELL C (Tercer cicle de primària)		
MARC VELASCO MATEU	ATTILIO BUSCHETTI	XÀTIVA
MARIA MASCARELL SERRA	LA MILAGROSA	CULLERA
DIEGO DE PEDRO MARROQUI	COL. SANTA MARÍA DE LA HUERTA	ALMORADÍ

Aprofitem per a recordar-vos que tenim obert el termini d'inscripció per a participar en els cursos presencials i a distància del Pla de Formació de la SEMCV per al curs 2014-2015. Teniu tota la informació a la pestanya ACTIVITATS de la nostra pàgina web: www.semcv.org

PROBLEMES OLÍMPICS

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
Apartat 22.045
46071 València

Director: Tomàs Queralt Llopis

Coordinador de redacció: Josep Manuel Martínez Canet

Correcció lingüística: José Fernando Juan García

D.L.: V-3026-2001
ISSN: 1578-1771

Portada: "Triángulos inacabados" Autor: Pavlo Soldatov. IES María Moliner (Port de Sagunt).

Et falta algun exemplar de la revista Problemes Olímpics? Si vols ens el pots demanar i te l'enviem a la teua adreça.

S.
E.
M.
C.
V.
AL-KHWARIZMI

SOL·LICITUD D'ENVIAMENT DE NÚMEROS ANTERIORS DE "PROBLEMES OLÍMPICS"

Nom: ______________ Cognoms: ______________________

Adreça: ______________________________ Telèfon: ________

C.P. ______ Població: ______________ Província: ______________

Correu-e: __________________ Tasca docent (curs, nivell, etc.)__________

Desitge rebre els següents números de la revista "Problemes Olímpics" a la meua adreça:

☐ Problemes Olímpics Nº 2 (1.2 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 3 (1.2 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 11 (1.8 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 12 (1.8 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 13 (1.8 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 14 (1.8 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 15 (2.4 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 16 (1.8 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 17 (1.8 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 18 (1.8 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 19 (1.8 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 20 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 21 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 22 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 23 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 24 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 25 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 26 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 27 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 28 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 29 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 30 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 32 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 33 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 34 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 35 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 36 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 37 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 38 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 39 (2.0 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 40 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 41 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 42 (2.0 €)

☐ Problemes Olímpics Nº 43 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 44 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 45 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 46 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 47 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 48 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 49 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 50 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 51 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 52 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 53 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 54 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 55 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 56 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 57 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 58 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 59 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 60 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 61 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 62 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 63 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 64 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 65 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 66 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 67 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 68 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 69 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 70 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 71 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 72 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 73 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 74 (2.5 €)
☐ Problemes Olímpics Nº 75 (2.5 €)

Els números que no apareixen en aquesta llista estan exhaurits.

Ens envies aquesta butlleta emplenada a la nostra adreça: Societat d'Educació Matemàtica "Al-Khwarizmi", Apartat 22.045, 46071-València, indicant en el sobre "Revista Problemes Olímpics", incloent el justificant d'ingrés del preu total dels exemplars que sol·licites al nostre compte de BANKIA: 2038-6301-37-3000011367.

SUMARI

ENUNCIATS

FASE AUTONÒMICA

SOLUCIONS

FASE AUTONÒMICA

ENUNCIATS

XXV OLIMPÍADA MATEMÀTICA
FASE AUTONÒMICA

PROBLEMES DE NIVELL C

(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA INDIVIDUAL

1. ELS TRES DAUS

Tinc tres daus amb lletres diferents. Al llançar-los puc formar paraules com: OSA, ESA, ATE, CAE, SOL, GOL, REY, SUR, MIA, PIO, FIN, VID, però no puc formar paraules com DIA, VOY, RIN.

Quines són les lletres que hi ha en cada dau?

2. LES CASES

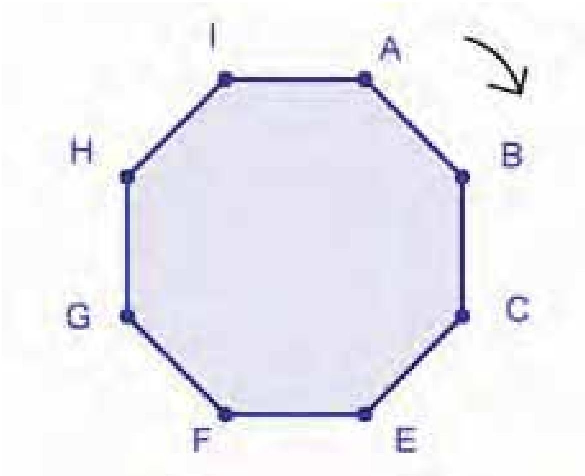
A la plaça del Castell de Xest hi ha 8 cases on viuen 36 persones en total. A cada casa viu un nombre diferent de persones i en cada línia de tres cases viuen 15 persones. Quantes persones viuen a cada casa?

3. LA FORMIGUETA

Una formigueta camina per la vora d'un plat de 8 costats iguals (amb forma d'octògon regular) com el que hi ha a la figura.

Cada costat del plat mesura 16 cm. La formigueta ix del vèrtex A i camina en el sentit que mostra la fletxa, sempre per la vora del plat. Fa la primera parada a 6 cm del vèrtex A i, després, cada 6 cm fa una parada.

En total fa 2.000 parades. Quantes vegades ha parat en el vèrtex A?



4. EMPAQUETAR LLIBRES

Tenim un nombre de llibres comprés entre 100 i 200 (els dos inclosos).

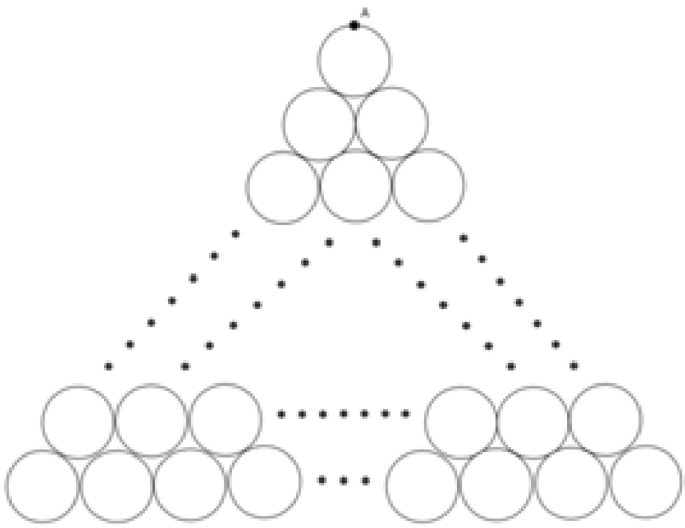
Si vull guardar-los en caixes de 10 per caixa, em sobra 1 llibre.

Si els distribuïsc en caixes de 9, em sobren 5 llibres.

Quants llibres em sobraran si els organitze en caixes on caben 7 llibres per caixa?

5. ELS BOTS DE LA GRANOTA

Tenim un triangle format per circumferències. En la base del triangle tenim 40 boles com observem al dibuix:

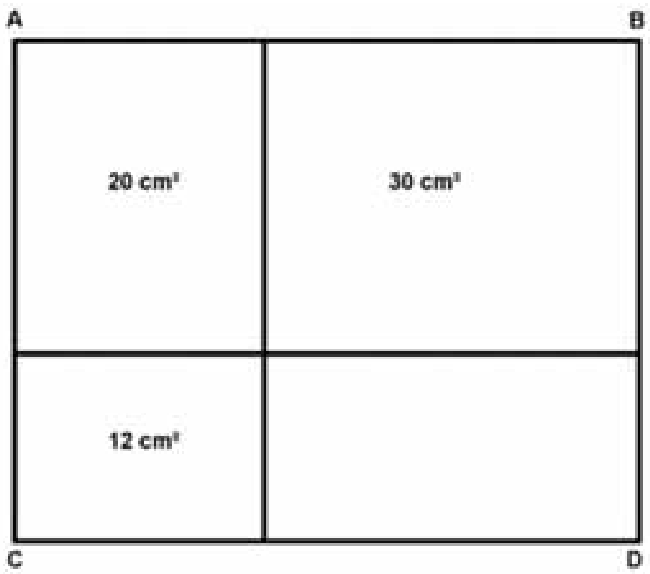


En el punt A hi ha una granota que va donant bots entre els punts de contacte de les circumferències.

Quants bots donarà la granota si sabem que passa per tots el punts de contacte sense repetir-ne cap?

6. ELS RECTANGLES

Caterina fa un rectangle ABCD i el divideix en quatre rectangles, tal com es mostra al dibuix. Les àrees de tres dels rectangles són les que s'indiquen en la figura. No coneixem l'àrea del quart rectangle. Quina és la mida de l'àrea del rectangle ABCD?



PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE VELOCITAT

1. EL NOMBRE

Escrivim en successió tots els nombres de l'1 al 101, en ordre, l'un al costat de l'altre, per a fer un nombre molt gran:

12345678910111213 14 979899100101

Quina serà la xifra que ocuparà la posició central en eixe enorme nombre?

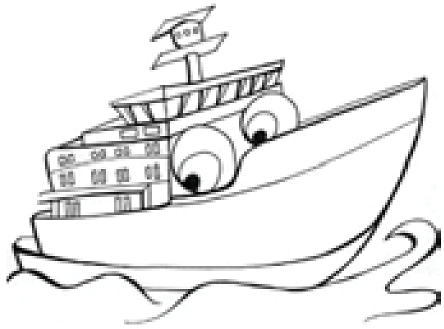
2. LES AMIGUES

Andrea, Blanca, Carla i Diana van quedar ahir per a berenar al parc del poble. Van seure en una taula quadrada. La que es va asseure a l'esquerra de Blanca, va beure aigua. Andrea estava enfront de la que va beure un refresc de cola. La que estava asseguda a la dreta de Diana va prendre un suc de taronja. La que va prendre un batut i la del suc estaven assegudes una enfront de l'altra.

Què va berenar cadascuna de les quatre amigues?

3. EL FERRI

Un ferri pot transportar 10 cotxes menuts o 6 camionetes en un viatge. El dimecres va creuar el riu 5 vegades, sempre ple, i va transportar 42 vehicles en total. Quants cotxes menuts va transportar?



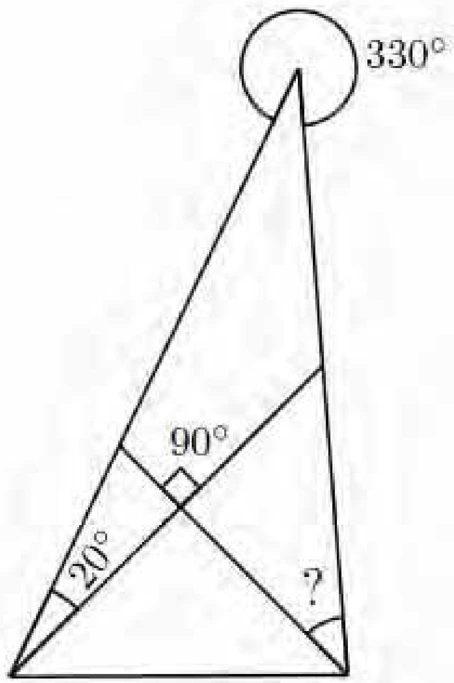
4. EL NOMBRE SECRET

Pau va pensar un nombre, el va dividir entre 7, al resultat li va sumar 7 i la suma la va multiplicar per 7. D'aquesta manera va obtindre el nombre 777.

Quin nombre va pensar inicialment Pau?

5. L'ANGLE

Quin és el valor de l'angle marcat amb el signe d'interrogació?



6. MÀXIM I MÍNIM

Sumeu cinc nombres adjacents de la següent graella per tal d'aconseguir, per una banda, la màxima suma possible, i per altra banda, la mínima suma possible. Podeu fer servir moviments en horitzontal, vertical i diagonal, però per a una mateixa suma no podeu passar dues vegades pel mateix cercle.

8	15	6	9
14	13	18	20
18	17	2	5
3	15	19	6

7. L'ENIGMA DE LA RULETA

La roda de la ruleta mostra els nombres de l'1 al 36. La bola s'ha detingut en el nombre a què jo havia apostat, que és divisible per 3 i imparell. Tant si sumem els seus dígits com si els multipliquem, el resultat està entre 4 i 8. Per quin nombre he apostat?

8. LA SERP

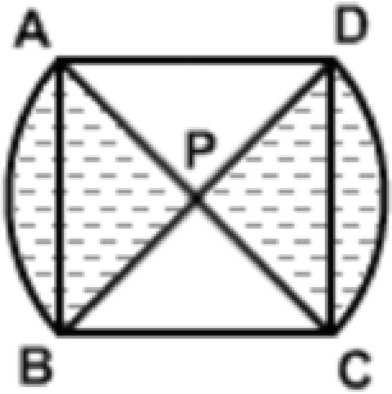
Hem col·locat els primers 20 nombres en una graella dibuixant un camí serpentejant com podeu veure en la taula. Si continuem col·locant els nombres en ordre i amb el mateix patró, en quina columna apareixerà el nombre 2.014?

COL1	COL2	COL3	COL4	COL5	COL6	COL7	COL8	COL9
1	**2**	**3**		**13**	**14**	**15**		**...**
		4		**12**		**16**		**...**
		5		**11**		**17**		**...**
		6		**10**		**18**		**...**
		7	**8**	**9**		**19**	**20**	**...**

9. LA FIGURA

El punt P és el centre del quadrat ABCD. Amb centre P i radi $\overline{PA}$ es traça un arc de circumferència $\widehat{AB}$. Amb centre P i radi $\overline{PC}$ es traça un arc de circumferència $\widehat{CD}$. La figura queda com la de baix.

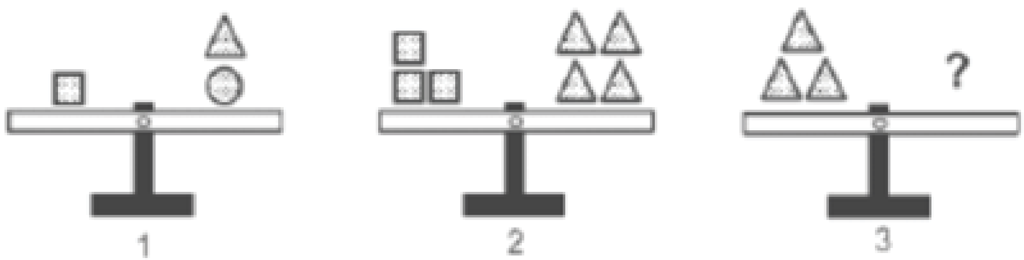
Si la diagonal del quadrat mesura 2 cm, quina és l'àrea de la regió ombrejada?



10. LA BALANÇA

Tenim quadrats, triangles i cercles de diversos materials. Les figures semblants pesen el mateix, però les figures diferents tenen distints pesos.

Amb una balança ens adonem d'alguns grups de figures que s'equilibren. Què es necessita per equilibrar el costat esquerre de la figura 3?



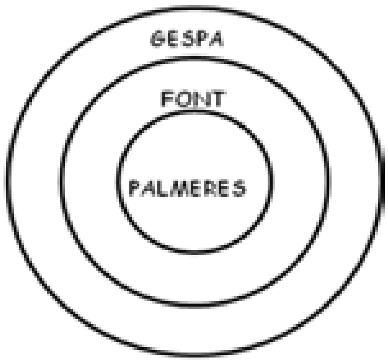
PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. LA FONT DE LES PALMERES

A l'eixida del menjador, a la part de darrere, trobareu una plaça on hi ha una gran font amb palmeres en la seua part central, els sortidors d'aigua enmig i gespa al voltant.

a. Calculeu el perímetre del cercle més exterior, és a dir, del cercle que conté la gespa.
b. Trobeu el diàmetre de la circumferència més exterior de la font, la qual conté la gespa.



ESTACIÓ 2. EL RELLOTGE DE SOL

Abandoneu la plaça de la Font i aneu cap a la dreta. Veureu una esplanada molt gran plena de gespa, que té un rellotge solar. Notareu que és més curt per dalt i més llarg per baix.

a. Observeu com estan distribuïts els mesos de l'any en el rellotge. Per què s'han distribuït d'eixa manera? Doneu una explicació per escrit.
b. Observeu que els nombres romans utilitzats per a representar les hores estan formats per combinacions de palets. Així, per exemple, la X són dos pals creuats i la V són dos palets que naixen del mateix punt.

I	V	X
UN PAL	**DOS PALS**	**DOS PALS**

Si posem junts en filera tots els palets de tots el nombres romans que estan en el rellotge, un darrere de l'altre, quina longitud total poden abastar?

NOTA: Per a fer les mesures dels palets del nombres romans, agafeu el VIII i el IX de la part esquerra del rellotge. Tingueu molta cura amb el roser. No xafeu les plantes!!

ESTACIÓ 3. LES COLUMNES I ELS TAULELLS DEL PASSADÍS

Retorneu a la font de palmeres i inicieu la marxa cap a la residència, segons indica el plànol. Trobareu que hi ha un corredor ple de columnes.

a. Volem pintar les columnes del passadís que uneix la font de palmeres amb el pas de vianants que hi ha abans d'arribar als edificis de tallers. Sabem que 1 m^2 de pintura val 3 €. Quant ens costarà pintar totes les columnes?

b. Quants taulells hi ha en el passadís entre les dues files de columnes?

Si cada taulell costa 2 €, quants euros ha costat fer tot el passadís?

ESTACIÓ 4. ELS BANCS I LES FONTS

Continuant pel corredor en direcció cap a la residència passareu uns edificis que són els tallers, i a continuació arribareu a l'edifici de les aules.

a. A un costat de la façana de les aules trobareu uns bancs de pedra. Quin volum de pedra s'ha utilitzat per fer un dels bancs?

b. A l'altre costat de la façana de les aules trobareu dues fonts de pedra. Volem transformar la font que té l'aixeta en una gran jardinera de flors. Quants metres cúbics de terra contindrà la nova jardinera des del sòl fins a la part superior?


c. Quants taulells de pedra s'han fet servir per a construir la font que no té l'aixeta?

ESTACIÓ 5. FORATS DE PEDRA

Continueu caminant pel corredor en direcció cap a la residència. Quan arribeu a la carretera, gireu cap a l'església. En la rotonda de l'església trobareu uns forats practicats en la pedra, com els de la foto.

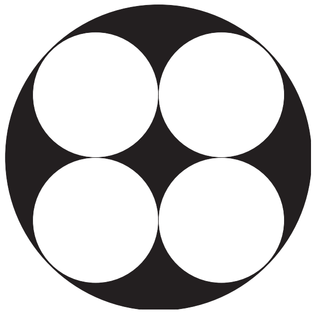
a. Quina forma geomètrica tenen els forats?
b. Calculeu el volum total de pedra que s'ha llevat per fer els forats situats entre les dues escales de la façana que mira cap a la residència.

PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA INDIVIDUAL

1. ELS QUATRE SOTAGOTS

Un cambrer porta una safata amb quatre sotagots com indica la figura. Sabries indicar l'àrea que no cobreixen els rodals, sabent que la safata té un radi de 20 cm?



2. LA SUMA IMPOSSIBLE

Un professor de matemàtiques repta els seus alumnes a calcular el valor de la xifra de les unitats de la següent suma:

$$1 + 2 + 9 + 2^2 + 9^2 + 2^3 + 9^3 + \cdots + 2^{2.014} + 9^{2.014}$$

Podries ajudar els alumnes a trobar quin és aquest valor?

3. TROBANT LES XIFRES AMAGADES

Troba els valors de A, de B i de C sabent que es compleix:

$$ABAC \times 43 = 3ABAC3$$

4. LLIURAR-SE DEL CÀSTIG

El pare de Fèlix ha castigat el seu fill per traure males notes en l'assignatura de Matemàtiques. Tot i això, li fa una proposta: li alçarà el càstig només si és capaç de saber quants nombres naturals hi ha menors que 10.000 i que tinguen almenys dos uns consecutius.

Podries ajudar Fèlix a lliurar-se del càstig?

5. TRAJECTE A L'INSTITUT

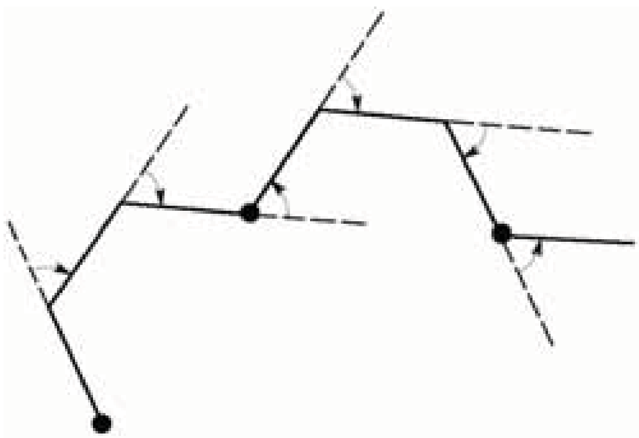
Hèctor i Dani són dos germans que van al mateix institut. No els agrada anar junts a classe ja que Hèctor va més ràpid i tarda 20 minuts per arribar, i Dani, que és una mica mandrós i relaxat, tarda 30 minuts.

Si Hèctor ix 5 minuts més tard que Dani, quants minuts tardaran a trobar-se?

6. VALÈNCIA EN FALLES

Un turista visita València en Falles i decideix fer una ruta pels principals monuments fallers. La ruta es fa per etapes i cada etapa es divideix en tres passejos de 100 metres en línia recta, de manera que, entre passeig i passeig, es fa un gir de 60° a la dreta. A més, entre l'últim passeig d'una etapa i el primer de la següent, es fa un gir a l'esquerra de 60°.

A quina distància (en metres) estarà el turista del punt inicial després d'haver recorregut 3.000 etapes?



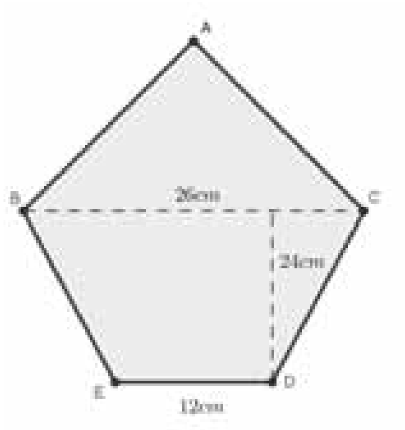
PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE VELOCITAT

1. EL GOT DE PAPER

Aquest got de paper en forma de pentàgon s'ha format fent coincidir la base major d'un trapezi isòsceles amb la hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles.

Calculeu el perímetre del pentàgon.



2. ELS SOUS DE CARLA I MARTA

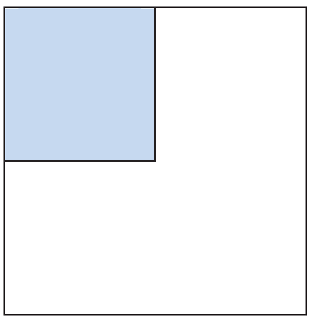
Carla i Marta han començat a treballar. Carla guanya 180 € mensuals menys que Marta. Carla és optimista i ha fet el càlcul següent:

"Marta guanyarà en 7 mesos el mateix que jo en 9 mesos".

Quants diners guanya Marta al mes?

3. EN EL QUADRAT

Dividiu la zona no ombrejada en quatre figures que tinguen la mateixa superfície. Trobeu 3 solucions sent una d'elles aquella en la qual totes les figures tinguen també la mateixa forma.



4. LA CLASSE

En una classe el 40% dels alumnes ha suspés anglés. El 70% dels que han suspés anglés han suspés matemàtiques i el 30% ha aprovat matemàtiques. Si en total han suspés anglés i matemàtiques 21 alumnes, quina o quines de les afirmacions següents són verdaderes?

a) 45 alumnes han suspés anglés.

b) 30 alumnes han aprovat anglés.

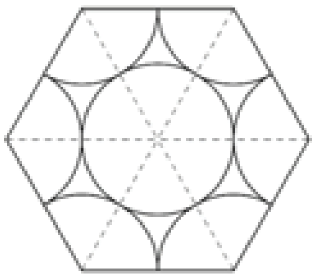
c) La classe té 100 alumnes.

d) 10 alumnes han suspés anglés i han aprovat matemàtiques.

e) Cap de les afirmacions anteriors és verdadera.

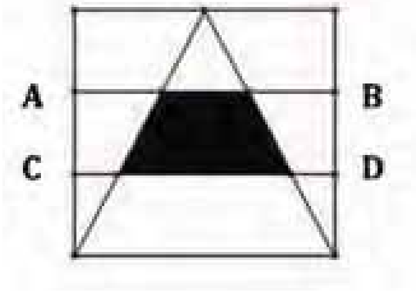
5. ASPERSORS EN EL JARDÍ

Un jardiner col·loca en un jardí, amb forma d'hexàgon regular, 7 aspersors: sis en els vèrtexs i un al centre. Si l'hexàgon té 4 metres de costat i cada aspersor fa un gir de 360º amb un abast de reg de 2 metres de longitud, quina és la superfície del jardí que es queda sense regar?



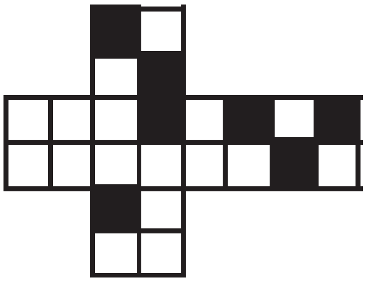
6. L'ÀREA DEL TRAPEZI

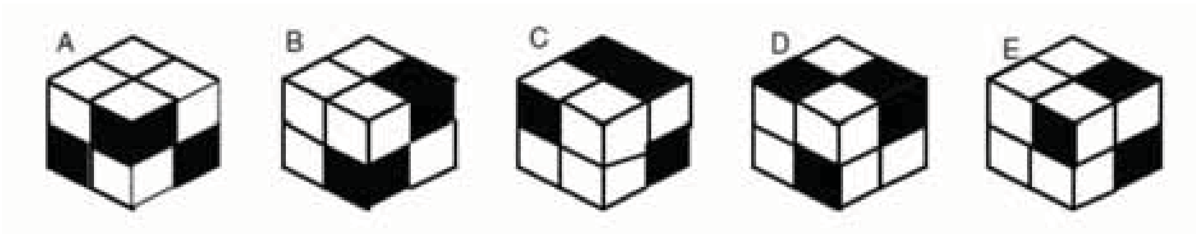
Si el següent quadrat té 60 cm² d'àrea i els punts A, B, C i D divideixen als costats corresponents en parts iguals, quant val l'àrea de la zona ombrejada?



7. EL CUB

Quin dels cubs A, B, C, D, E té el següent desenvolupament?



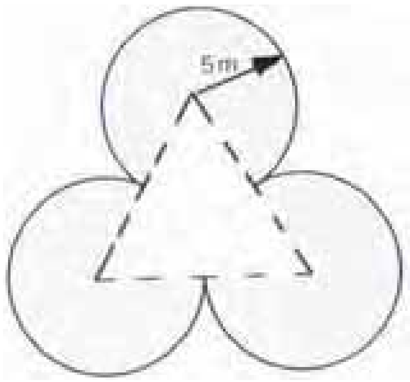


8. SUMANT

Quant sumen les 2.014 primeres xifres de la divisió $\frac{1}{14}$?

9. LA GRAN FONT

En un parc de València hi ha una font que té forma de trèvol. Diuen que és la més gran de la ciutat. Quants litres d'aigua caben si la profunditat és d'un metre?



10. LA NOTA

La mitjana aritmètica de la qualificació de 4 gimnastes d'un equip de 5 membres en una prova per equips ha sigut de 6,5 punts. En finalitzar l'última component, la nota mitjana de tot l'equip ha sigut de 7 punts.

Quina nota ha obtingut l'última participant?

PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. LA ZONA ENJARDINADA

a. Calculeu el perímetre i l'àrea de la corona circular que rodeja el jardí.
b. Volem omplir aquesta zona amb aigua. Quants litres d'aigua necessitem?

ESTACIÓ 2. MESUREM FANALS

En la placeta on es troba la font veureu que als dos costats hi ha una sèrie de fanals. Calculeu l'altura d'un d'aquests fanals aplicant els principis de semblança de triangles.

ESTACIÓ 3. QÜESTIÓ DE COMPTAR

QÜESTIÓ PRÈVIA: Preneu nota de l'hora que llegiu al rellotge solar. Calculeu quina és la diferència entre aquesta hora i la que marca el vostre rellotge. Aproximeu als quarts.

Es trobeu a l'aparcament de l'IVASTE. Suposeu que a l'aparcament hi ha 28 cotxes, distribuïts en colors de la següent manera: 7 cotxes de color roig, 10 cotxes de color blau, 5 cotxes de color gris, 2 cotxes de color blanc, 3 cotxes de color negre i 1 cotxe de color groc.

a. Quina és la probabilitat que isca de l'aparcament un cotxe de color negre? Suposeu que tots els cotxes tenen la mateixa probabilitat d'eixir.

Cada 15 minuts entra un cotxe del color menys nombrós en eixe moment (en cas que hi haja dos colors igual de nombrosos, escull aquell que aparega primer en ordre alfabètic), i n'ix un del color més nombrós (amb el mateix criteri en cas d'empat de dos colors).

b. Quants cotxes quedaran de cada color quan hagen passat els minuts que has contestat en la qüestió prèvia?
c. Hi ha algun color de cotxe que no isca ni entre mai? Hi haurà algun moment en què s'estabilitzarà la situació?

ESTACIÓ 4. OLIMPÍADA DE NATACIÓ

En una de les piscines del complex es realitzen les olimpíades de natació de la Comunitat Calenciana. De tots els carrers on poden participar els finalistes, el carrer 7 no es pot ocupar (és el carrer que reserva la competició per temes d'organització).

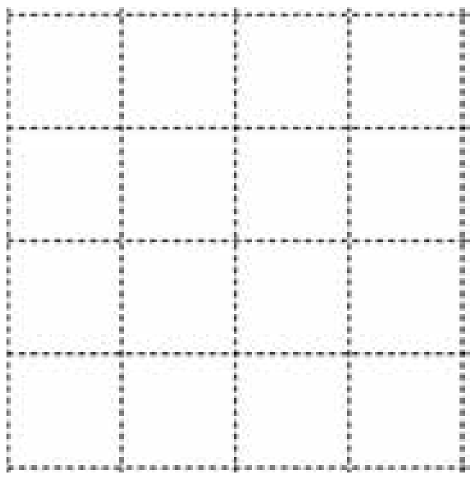
Dos nadadors valencians han arribat a la final. Encara no saben en quin carrer nadaran. Podríeu dir de quantes maneres distintes els dos nadadors poden ocupar els seus carrers, tenint en compte que:

- els dos carrers no poden ser primers
- no són divisors un de l'altre?

ESTACIÓ 5. MOSAICS I PAPERERES

Al corredor de la residència trobaràs el següent mosaic.

a. Dibuixeu en la plantilla quin és el motiu mínim del dit mosaic (és a dir, la unitat mínima de repetició).



b. Ara pareu atenció a les papereres. Volem rodejar l'exterior de la paperera amb un paper de color. Quants metres quadrats de paper necessitem per a "donar color" a totes les papereres del *hall*?

PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA INDIVIDUAL

1. OBTÚS

Triem a l'atzar un punt P en un quadrat ABCD. Quina és la probabilitat que l'angle APB siga obtús?

2. UN DIA EN LES CARRERES

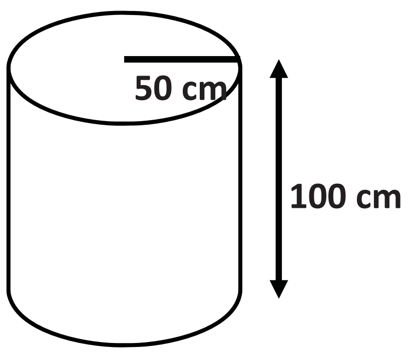
Ets el propietari d'una quadra de cavalls de competició. Tens 25 cavalls i has d'identificar els 3 més ràpids de la cavallada per dur-los a la competició del cap de setmana. El cas és que no disposes de cap dispositiu per cronometrar el temps, però pots fer totes les carreres que vulgues (amb un màxim de 5 cavalls per carrera) per tal de determinar els més ràpids.

Quin és el nombre **mínim** de carreres que hauràs de fer per trobar els **3 cavalls més ràpids**?

3. OMPLINT EL CILINDRE

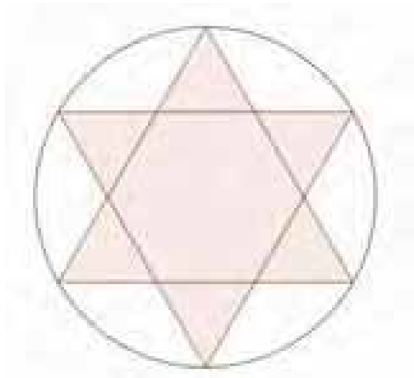
Volem fer un experiment amb la *Font de les Cent Aixetes*. Cada aixeta vessa **1 litre d'aigua per minut**. Cada tres minuts s'obri una nova aixeta, de manera que durant els tres primers minuts només hi ha una aixeta oberta, durant els tres minuts següents hi ha dues aixetes obertes, i així successivament.

Volem omplir d'aigua un **cilindre** com el de la figura. Digues quant de temps tardaràs a fer-ho en la Font de les Cent Aixetes.



4. LA VIDRIERA

Hem d'arreglar una vidriera que està dalt d'una torre. La vidriera té la següent forma:



Té dues parts, una de color i l'altra transparent. Atès que entra massa llum volem canviar la part transparent per una de color blau. Sabem que l'àrea de la part de color es de $\sqrt{3}$ m^2.

Quina superfície de vidre necessitem?

5. ELS QUATRE NOMBRES MISTERIOSOS

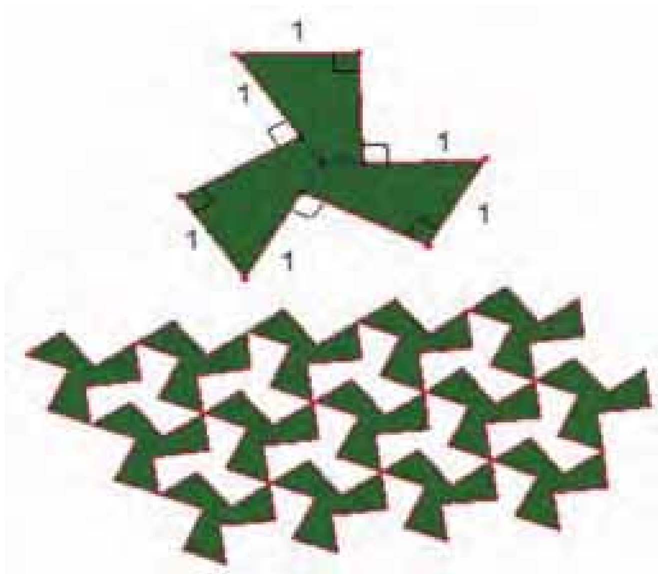
Quatre nombres w, x, y, i z compleixen $w < x < y < z$. Cadascun dels sis possibles parells de nombres distints té una suma diferent. Les quatre sumes més xicotetes són 1, 2, 3, i 4.

Quina és la suma de tots els possibles valors de z?

6. LA TESSEL·LA

En la següent figura podeu trobar un mosaic i el detall de la tessel·la que el forma. La tessel·la té nou costats, sis dels quals tenen longitud 1. La tessel·la es pot dividir en tres quadrilàters iguals com es mostra en la figura.

Determineu l'àrea de la tessel·la.



PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE VELOCITAT

1. LA XIFRA OCULTA

Calculeu la xifra de les unitats del nombre que resulta de sumar $9^{21} + 9^{22} + + 9^{23} + 9^{24}$. No es pot utilitzar la calculadora.

2. EL TESTAMENT

El senyor Enric va deixar en testament tots els seus diners als seus fills, repartits de la següent manera:

- Al primer li deixà 1.000 € i $\frac{1}{10}$ de la resta.
- Al segon li deixà 2.000 € i $\frac{1}{10}$ de la resta.
- Al tercer li deixà 3.000 € i $\frac{1}{10}$ de la resta, i així successivament.

Si al final cada fill tenia la mateixa quantitat, quants fills tenia el senyor Enric?

3. DUES DIVISIONS

En dividir el nombre 319 entre cert nombre enter positiu m es va obtenir de residu 13. En dividir 370 entre el mateix nombre s'obté de residu novament 13. Quants possibles valors té el nombre m?

4. QUATRILOTO

En la loteria de Quatrilandia, cada bitllet té un nombre de tres xifres que usa només els dígits 1, 2, 3 i 4 (es poden repetir dígits). Per aconseguir el primer premi cal que coincidisquen les tres xifres en idèntica posició. Un bitllet és guanyador del segon premi si coincideix en dues xifres en les seues posicions amb el nombre sortejat.

Si comprem un sol bitllet, quina és la probabilitat de ser agraciat amb el segon premi?

5. EL PUNT I LA CORDA

El diàmetre d'una circumferència de centre O és 110 cm. El punt P divideix la corda en què es troba en dos segments de 30 i 60 cm.

Quants centímetres mesura el segment $\overline{OP}$?

6. PARÀBOLA INTALLABLE

Busquem el menor de tots els nombres enters k per als quals la paràbola:

$$y = (2k - 1)x^2 - 8x + 6$$

no talla l'eix horitzontal.

7. QUATRES, QUATRES I MÉS QUATRES

Les pàgines d'un llibre estan numerades des de l'1 fins al 2.014. Quantes vegades apareix el dígit 4?

8. UN TRIANGLE RECTANGLE

Un dels angles d'un triangle rectangle mesura 25°. Quant mesura l'angle entre l'altura i la mitjna, traçades des de l'angle recte?

9. FUNCIÓ DE L'ANY

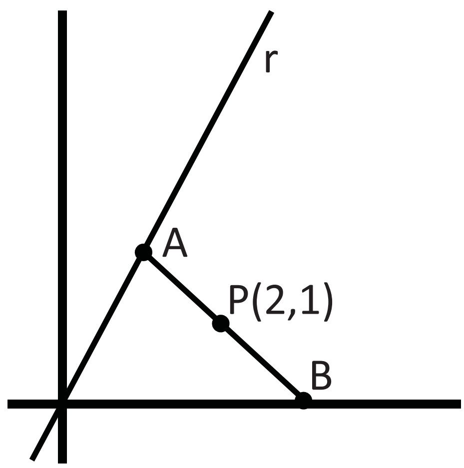
Una funció compleix la següent condició: $2f(x) + f\left(\frac{2014}{x}\right) = 3x$

Calculeu $f(38)$.

10. PUNT MITJÀ

La recta r té per equació $y = 2x$. Passant pel punt fix $P = (2,1)$ dibuixem un segment, $\overline{AB}$, tal que A està sobre la recta r, B sobre l'eix OX, i P és el punt mitjà del segment $\overline{AB}$.

Quant mesura aquest segment $\overline{AB}$?



PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. L'EDIFICI RODÓ

Des del punt de partida en la residència, baixant per la dreta de la piscina 1 passareu entre dos edificis. Si seguiu recte arribareu al menjador. A l'eixida del menjador a la dreta, trobareu un edifici rodó que al centre té un jardí. Aquest jardí, que conté al seu interior unes palmeres, té forma d'illa i està envoltat primer per una font sense aigua, i després per un jardí amb terra.

a. Calculeu el volum de terra de l'illa.

b. Si es llança una pilota des de fora d'aquest recinte, quina és la probabilitat que caiga en l'anell circular que representa la zona de la font buida?

ESTACIÓ 2. PARANIMF

Cal que travesseu el jardí i us dirigiu cap al Paranimf, deixant darrere els edificis del menjador i en direcció a la vostra dreta. El Paranimf és un edifici singular, ja que té una estructura molt característica.

Àngel, Bernat, Carme, Diana i Elisa volen entrar al Paranimf.

a. Si cadascú entra per una porta distinta, de quantes formes distintes poden entrar?

b. Si formen equips de xics i xiques, i cada equip entra per una porta, de quantes maneres poden entrar?

ESTACIÓ 3. APARCAMENT DELS AUTOBUSOS

Torneu cap al punt d'inici i, passant per la dreta de la gespa, després de la cafeteria, observeu l'esplanada que hi ha al costat dels edificis de la Gerència. Es tracta de l'aparcament dels autobusos. Hi ha lloc suficient per a que puguen aparcar 34 autobusos.

Observareu que les places d'aparcament estan numerades de l'1 al 34.

Un determinat autobús només pot aparcar si el número de la seua matrícula és múltiple del número de l'aparcament.

En quins llocs podran aparcar els següents autobusos amb matrícula que us indiquem?

a) 0949-FGV

b) 1387-BCD

c) 1802-DNR

d) 5365-HDR

e) 1343-GLC

ESTACIÓ 4. RELLOTGE DE SOL

Un rellotge de sol és un instrument que assenyala les hores mitjançant les ombres d'una agulla clavada dins d'un quadrant on hi ha marcades les línies horàries. Aquest rellotge de sol s'anomena **equatorial** i permet llegir l'hora solar durant el dia. La superfície del rellotge solar està en el pla de l'equador terrestre, mentre que la barra (el gnòmon) representa l'eix terrestre apuntant al pol Nord celeste.

En aquest model, el gnòmon que projecta l'ombra té la següent orientació espacial:

- És paral·lel a l'eix de rotació de la Terra.
- Està contingut en el pla meridià del lloc.
- Forma amb el pla horitzontal un angle igual a la latitud del lloc.

Cal que determineu quin és el valor de la latitud del lloc on estem.

Observeu quina hora marca el rellotge de sol i mireu l'hora dels vostres rellotges. Justifiqueu el perquè de la diferència.

ESTACIÓ 5. LA RAMPA DEL CAMÍ

De camí de tornada a la residència, després de passar l'IVASPE i entre les dues piscines, arribareu a la residència i es trobareu amb la rampa amb tres jardinets esglaonats i que deixa sense alè al recórrer-la.

a. Calculeu l'angle d'inclinació de la rampa.

b. Calculeu el desnivell que supera la rampa.

SOLUCIONS

XXV OLIMPÍADA MATEMÀTICA
FASE AUTONÒMICA

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA INDIVIDUAL

1. ELS TRES DAUS

Solució: Les lletres que hi ha en cada dau són les següents:

Dau 1: O-M-E-F-U-V

Dau 2: S-G-C-I-T-Y

Dau 3: A-D-L-P-N-R.

2. LES CASES

Solució: Les persones que viuen a cada casa són:

3	5	7
4		2
8	1	6

3. LA FORMIGUETA

Solució: La formigueta ha parat 31 vegades en el vèrtex A.

El perímetre del plat és: $16 \cdot 8 = 128$ cm

Si para cada 6 cm, cada volta farà $128 : 6 = 21$ parades i 2 cm de residu.

Durant la primera volta fa la primera parada a 6 cm del vèrtex A, i fa l'última parada quan li falten 2 cm per arribar al vèrtex A.

En la segona volta fa la parada inicial a 4 cm del vèrtex A, i li falten 4 cm per arribar al vèrtex A quan en fa l'última.

A l'inici de la tercera volta para a 2 cm del vèrtex A, i arriba just al vèrtex A.

En total ha realitzat 64 parades, ja que cada volta realitza 21 parades de 6 cm + 2 cm. Aleshores són necessàries 64 parades per a coincidir en A.

Si la formiga fa 2.000 parades: $2000\!:64 = 31{,}25$. Per tant, seran 31 vegades les que coincidirà que es para en el vèrtex A.

4. EMPAQUETAR LLIBRES

Solució: Sobraran 5 llibres.

Busquem múltiples de 10 del 100 al 200 i els sumem 1:

$$100 + 1 = 101 - 121 - 131 - 141 - 151 - 161 - 171 - 181 - 191$$

Busquem múltiples de 9 del 99 al 200 i els sumem 5:

$$99 + 5 = 104 - 113 - 122 - 131 - 140 - 149 - 158 - 167 - 176 - 185 - 194$$

Del 100 al 200, l'únic valor que coincideix és 131.

Aleshores, tindrem 131 llibres.

Dividim $131 : 7 = 18$ capses i em sobren 5 llibres.

5. ELS BOTS DE LA GRANOTA

Solució: La granota donarà 2.340 bots.

La granota donarà els mateixos bots que punts de contacte hi ha entre les circumferències. Aleshores, calculem els punts de contacte entre les circumferències.

- Si la base del triangle és 1 circumferència: 0 bots.
- Si la base del triangle són 2 circumferències: $0 + 3$ bots.
- Si la base del triangle són 3 circumferències: $0 + 3 + 6$ bots.
- Si la base del triangle són 4 circumferències: $0 + 3 + 6 + 9$ bots.
- Si la base del triangle són 5 circumferències: $0 + 3 + 6 + 9 + 12$ bots.
- Si la base del triangle són 6 circumferències: $0 + 3 + 6 + 9 + 12 + 15$ bots, etc.

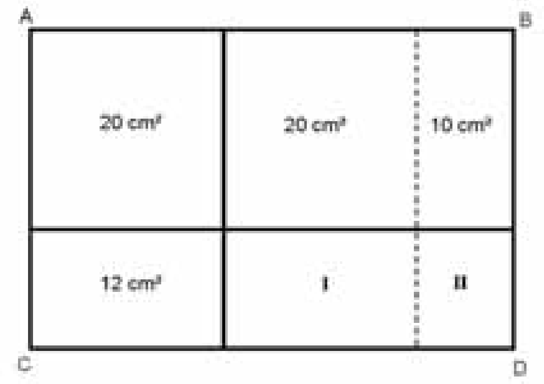
Observem que el que estem sumant són tots els nombres múltiples de 3.

Aleshores, si la base del triangle són 40 circumferències, tindrem:

$0 + 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + \ldots + 3 \cdot 38 + 3 \cdot 39 = 20 \cdot 117 = 2.340$ bots.

6. ELS RECTANGLES

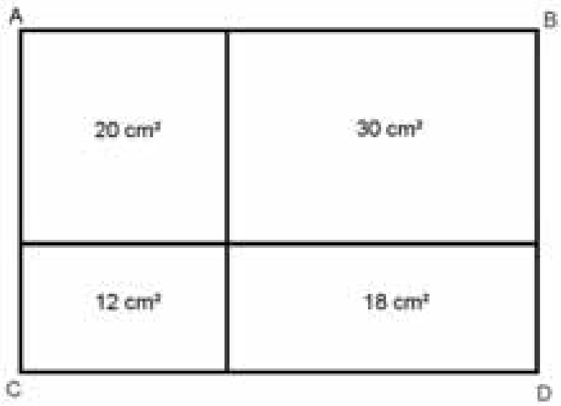
Solució: L'àrea del rectangle ABCD és 80 cm².



El problema es pot resoldre utilitzant la proporcionalitat. Ho farem així, però de forma gràfica:

En la figura el rectangle I té les mateixes dimensions que el que té 12 cm^2 d'àrea. Per tant la seua àrea és també 12 cm^2.

El rectangle II té la mateixa altura que el rectangle I. La longitud de la base del rectangle II és igual a la meitat de la del rectangle I. Per tant, l'àrea del rectangle II és la meitat de l'àrea del rectangle I: 6 cm^2. Tenim:



I l'àrea total: $20 + 30 + 12 + 18 = 80$ cm^2.

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE VELOCITAT

1. EL NOMBRE

Solució: La xifra que ocuparà la posició central és 5.

Amb els nombres d'una xifra (1 al 9) hi ha 9 dígits.

Amb els nombres de dues xifres (10 al 99) hi ha 180 dígits.

Amb els nombres de tres xifres (100 i 101) hi ha 6 dígits.

Tenim: $9 + 180 + 6 = 195$ dígits.

La xifra central correspon al dígit 98.

Si comptem fins al nombre 53, tenim 97 xifres. Aleshores la xifra del mig correspon a un 5.

2. LES AMIGUES

Solució: Andrea va prendre aigua. Blanca va beure un batut. Carla va demanar un suc de taronja i Diana un refresc de cola.

Tenint en compte que les que prengueren un batut i un suc "estaven assegudes uns enfront de l'altra", Andrea, que "estava enfront de la que va beure un refresc de cola", ha de ser la que va beure aigua i va seure a l'esquerra de Blanca. A continuació es dedueix que Diana, que tenia a la dreta a qui va beure suc de taronja, va seure enfront d'Andrea; i la resta es completa fàcilment.

3. EL FERRI

Solució: Va transportar 30 cotxes menuts.

L'única possibilitat de transportar 42 vehicles en els 5 viatges anant el ferri sempre ple és: $10 + 10 + 10 + 6 + 6$.

Això suposa transportar 30 vehicles menuts.

4. EL NOMBRE SECRET

Solució: El nombre que va pensar Pau és 728.

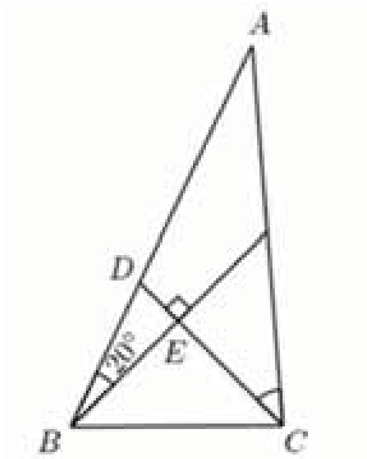
Del que es tracta és de desfer les operacions realitzades:

$$777 : 7 = 111 \rightarrow 111 - 7 = 104 \rightarrow 104 \cdot 7 = 728$$

5. L'ANGLE

Solució: L´angle mesura 40°.

$\angle BAC = 360° - 330° = 30°$ i $\angle ADC = 20° + 90° = 110°$, per ser exterior al triangle BDE, per tant, $\angle ACD = 180° - 110° - 30° = 40°$.



6. MÀXIM I MÍNIM

Solució: El màxim és 89 i el mínim 31.

- Valor màxim: $20 + 18 + 17 + 19 + 15 = 89$
- Valor mínim: $6 + 5 + 2 + 15 + 3 = 31$

7. L'ENIGMA DE LA RULETA

Solució: He apostat pel nombre 15.

Com que ha de ser un múltiple de 3 imparell, fem un llistat:

3 → No, perquè la suma de les seues xifres no està entre 4 i 8.

9 → No, perquè la suma de les seues xifres no està entre 4 i 8.

15 → És un candidat. Compleix totes les condicions, és múltiple de 3, imparell, la suma de les seues xifres és 6, que està entre 4 i 8, i, a la fi, el producte de les seues xifres és 5, que també està entre 4 i 8.

21 → No, perquè la suma de les seues xifres no està entre 4 i 8.

27 → No, perquè la suma de les seues xifres no està entre 4 i 8.

33 → No, perquè el producte de les seues xifres no està entre 4 i 8.

Aleshores l'única possible solució és el nombre 15.

8. LA SERP

Solució: El nombre 2.014 apareixerà en la columna 673.

El patró es repeteix cada 12 nombres. El múltiple de 12 més proper a 2.014 és el 2.016, que es correspon a la repetició 168 ($12 \cdot 168 = 2.016$).

Cada patró de 12 ocupa 4 columnes. Així $168 \cdot 4 = 672$, i li hem d'afegir la columna inicial on es troba l'1. Per tant a la columna 673 es troba el 2.016 i, conseqüentment, també el 2.014.

9. LA FIGURA

Solució :L'àrea demanada mesura $\frac{\pi}{2}$ cm²

L'àrea que demanen es correspon amb mitja circumferència de radi 1, ja que la diagonal és 2 i el radi és la meitat de la diagonal. Aleshores l'àrea és: $A = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}\,\text{cm}^2$.

10. LA BALANÇA

Solució: Es necessiten 9 cercles.

1 quadrat equival a 1 triangle més 1 cercle per la balança 1. Per tant, 3 quadrats de la figura 2 equivalen a 3 triangles més 3 cercles. Aleshores, la balança 2 quedaria:

3 triangles + 3 cercles = 4 triangles → d'ací podem deduir que 1 triangle equival a 3 cercles.

Aleshores, els tres triangles de la balança 3 estaran en equilibri amb 9 cercles.

Com que la primera balança indica que 1 quadrat equival a 1 triangle més 1 cercle, deduïm que un quadrat equival a 4 cercles. Per tant, sense utilitzar triangles, com se suposa que hem de fer, dues possibilitats alternatives són: 1 quadrat i 5 cercles, o 2 quadrats i 1 cercle.

PROBLEMES DE NIVELL C
(TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. LA FONT DE LES PALMERES

Solució:

a. Per a mesurar el perímetre és suficient comptar les rajoles quadrades que envolten la font i que estan en contacte amb la circumferència exterior. Hi ha exactament 198 rajoles i la longitud d'una d'elles és 40 cm = 0,40 m. Per tant, el perímetre exterior és:

$$L = 198 \times 0{,}40 = 79{,}20 \text{ metres}$$

b. Per a trobar el diàmetre de la circumferència exterior és suficient utilitzar la relació entre la longitud de la circumferència i el diàmetre:

$$L = \pi \cdot D \rightarrow D = \frac{L}{\pi} = \frac{79{,}20}{\pi} \cong 25{,}21 \text{ m}$$

ESTACIÓ 2. EL RELLOTGE DE SOL

Solució:

a. La distribució dels mesos en el rellotge està feta tenint en compte la duració mitjana del dia solar en cada mes. Així, per exemple, els últims mesos són juliol i juny, perquè contenen els dies més llargs de l'any, mentre què els primers són desembre i gener perquè en eixos mesos es troben els dies més curts de l'any.

b. Els nombres romans què hi apareixen són: V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, I, II, III, IV, V, VI, i VII. Les mesures dels palets del nombres romans són les següents:

Símbol	Cada pal mesura…
V	19 cm
I	18,7 cm
X	21,5 cm

Per tant, podem fer el càlcul amb l'ajut d'una taula:

Símbol	Núm. de repeticions	Càlcul de la longitud
V	8	$2 \times 19 \times 8 = 304$ cm
I	20	$20 \times 18{,}7 = 374$ cm
X	4	$2 \times 21{,}5 \times 4 = 172$ cm

I la longitud total serà: $304 + 374 + 172 = 850$ cm $= 8{,}50$ m

ESTACIÓ 3. LES COLUMNES I ELS TAULELLS DEL PASSADÍS

Solució:

a. En el passadís hi ha un total de 28 columnes, i les mesures d'una columna són: Altura: 246 cm, Perímetre o longitud de la circumferència de la base: 125 cm

   Aleshores, la superfície a pintar de cada columna és un rectangle de base el perímetre del cercle, $P = 125$ cm i d'altura $h = 246$ cm. Per tant, la superfície d'una columna és: $30.750\ cm^2 = 3{,}075\ m^2$. Com són 38 columnes, caldrà pintar un total de $3{,}075 \cdot 28 = 86{,}1\ m^2$.

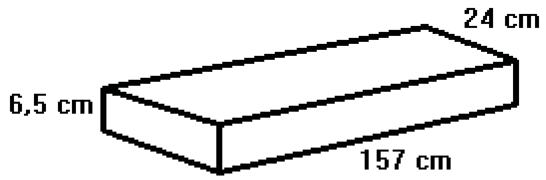
   Com que el metre quadrat costa 3 €, el cost total de pintura serà: $86{,}1 \cdot 3 = 258{,}3$ €.

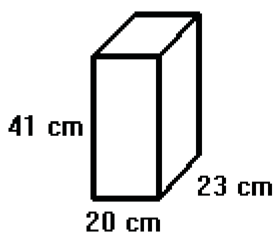
b. El passadís és un rectangle de 8 taulells d'ample i 140 taulells de llarg. Per tant, té $8 \cdot 140 = 1.120$ taulells. Suposant que cada taulell costa 2 €, fer el passadís costarà $1.120 \cdot 2 = 2.240$ €.

ESTACIÓ 4. ELS BANCS I LES FONTS

Solució:

a. El banc està format per la combinació de tres ortoedres, les mesures dels quals són les següents:





El volum del primer ortoedre és: $6{,}5 \cdot 157 \cdot 24 = 24.492$ cm^3

El volum de cadascun dels altres dos es: $41 \cdot 20 \cdot 23 = 18.860$ cm^3

Per tant, el volum total de pedra del banc és:

$$24.492 + 2 \cdot 18.860 = 62.212 \text{ cm}^3$$

És a dir, 0,062212 m^3.

b. La font de l'aixeta és un quart de cilindre de 82 cm d'altura. El cilindre interior (que és el que es vol omplir de terra) té un radi de 53 cm. Per tant, el volum de terra que cap dins de la font és:

$$\frac{1}{4}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{4}\pi \cdot 53^2 \cdot 82 = \frac{115.169}{2}\pi \cong 180.907{,}0422 \text{ cm}^3 \cong 0{,}18 \text{ m}^3$$

c. La superfície de la font està formada per 6 files de 15 taulells cada una. Per tant, té 90 taulells en total.

ESTACIÓ 5. FORATS DE PEDRA

Solució:

a. Els forats són prismes rectangulars de 38 cm d'altura.

b. El llarg i l'ample de l'interior de cada forat mesuren, respectivament, 82 cm i 70 cm. Per tant, el volum d'un forat és:

$$38 \cdot 82 \cdot 70 = 218.120 \text{ cm}^3$$

Entre les dues escales hi ha tres grups de 14 forats cadascun. En total hi ha $14 \cdot 3 = 42$ forats.

Per tant, el volum total de pedra que s'ha llevat per a fer els forats és:

$$42 \cdot 218.120 = 9.161.040 \text{ cm}^3 \cong 9{,}16 \text{ m}^3$$

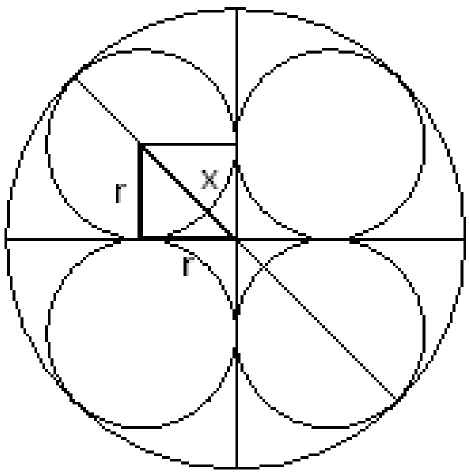
PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA INDIVIDUAL

1. ELS QUATRE SOTAGOTS

Solució: L'àrea que busquem és 394,21cm².

El que necessitem per resoldre aquest problema és conèixer l'àrea dels cercles menuts per restar-la a l'àrea del cercle gran. Aleshores, cal saber quin és el radi de les circumferències menudes, que anomenarem *r*. Per calcular què val *r* el que farem serà considerar el següent triangle rectangle i utilitzar el Teorema de Pitàgores:



Tenim que $x^2 = r^2 + r^2$, d'on es dedueix que $x = \sqrt{2}r$.

Com sabem que el radi de la circumferència gran mesura 20 cm, tenim que $20 = r + \sqrt{2}r$. Aïllant *r* s'obté que:

$$r\left(1 + \sqrt{2}\right) = 20 \quad \rightarrow \quad r = \frac{20}{1+\sqrt{2}} = 20\left(\sqrt{2}-1\right) \cong 8{,}28 \text{ cm}$$

Per tant:

- Àrea circumferència menuda = $\pi \cdot 20^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \cong 215{,}60 \text{ cm}^2$
- Àrea circumferència gran = $20^2\pi \cong 1256{,}64 \text{ cm}^2$
- Àrea ombrejada = $\pi \cdot 20^2 - 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cong 394{,}22 \text{ cm}^2$

2. LA SUMA IMPOSSIBLE

Solució: La suma acaba en 7.

Comencem calculant els primers termes de la suma per veure si trobem alguna regularitat en les últimes xifres de les potències.

$$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, 2^8 = 256\ldots$$

$$9^1 = 9, 9^2 = 81, 9^3 = 729, 9^4 = 6.561\ldots$$

Si ens fixem, després de calcular unes quantes potències, es pot veure com les últimes xifres d'aquestes es repeteixen de manera que:

a. Les potències de 9 d'exponent parell acaben en 1, i les d'exponent imparell, en 9.

b. Les potències de 2, quan l'exponent es pot escriure com $4n-3$, acaben en 2; quan es pot escriure com $4n-2$, en 4; quan s'escriu com $4n-1$, en 8; i, finalment, quan l'exponent s'escriu $4n$, en 6.

Per tant, com que en la suma que volem calcular hi ha unes quantes potències de cada tipus, haurem de saber quantes hi ha de cada per saber quina és l'última xifra.

D'una banda, com que la suma acaba amb $9^{2.014}$, hi haurà la meitat de potències de 9 que acaben en 1 i l'altra meitat que acaben en 9. En concret, hi haurà 1.007 potències que acaben en 1 i 1.007 que acaben en 9. Aleshores, si les sumem, tenim que l'última xifra de la suma d'aquests nombres serà zero:

$$1 \cdot 1007 + 9 \cdot 1007 = \ldots 7 + \ldots 3 = \ldots 0$$

D'altra banda, pel que fa a les potències de 2 tenim que:

$2^1 = \mathbf{2}$	$2^5 = 3\mathbf{2}$	$2^9 = 51\mathbf{2}$	...	$2^{2009} = \cdots \mathbf{2}$	$2^{2013} = \cdots \mathbf{2}$
$2^2 = \mathbf{4}$	$2^6 = 6\mathbf{4}$	$2^{10} = 102\mathbf{4}$	...	$2^{2010} = \cdots \mathbf{4}$	$2^{2014} = \cdots \mathbf{4}$
$2^3 = \mathbf{8}$	$2^7 = 12\mathbf{8}$	$2^{11} = 204\mathbf{8}$	...	$2^{2011} = \cdots \mathbf{8}$	
$2^4 = 1\mathbf{6}$	$2^8 = 25\mathbf{6}$	$2^{12} = 409\mathbf{6}$	...	$2^{2012} = \cdots \mathbf{6}$	

Suma de les últimes xifres:

2+4+8+6=...0	2+4+8+6=...0	2+4+8+6=...0	...	2+4+8+6=...0	2+4=6

Aleshores, la suma de potències de 2 acaba en $0 + \ldots + 0 + 6 = 6$.

Per tant, al sumar el nombre 1 que també apareix a la suma amb 6 i 0, tenim que el valor de l'última xifra del nombre resultant és $1 + 0 + 6 = 7$.

3. TROBANT LES XIFRES AMAGADES

Solució: A = 9, B = 0, C = 1.

Si posem la multiplicació de la forma:

$$\begin{array}{cccccc} & & A & B & A & C \\ & & & & 4 & 3 \\ \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & \\ \hline 3 & A & B & A & C & 3 \end{array}$$

Tenim que $X_5 = 3$ necessàriament. Aleshores l'única possibilitat és $C = 1$. Per tant queda:

$$\begin{array}{cccccc} & & A & B & A & 1 \\ & & & & 4 & 3 \\ \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & \\ \hline 3 & A & B & A & 1 & 3 \end{array}$$

Notem que $Y_5 = 4$ ja que és el resultat de multiplicar 4 i 1. Aleshores tenim que el resultat de sumar 4 i X_4 acaba en 1, d'on es dedueix que $X_4 = 7$, ja que X_4 ha de ser un nombre natural. D'ací s'obté que $A = 9$ i la multiplicació queda com segueix:

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & B & 9 & 1 \\ & & & & 4 & 3 \\ \hline & X_1 & X_2 & X_3 & 7 & 3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & 4 & \\ \hline 3 & 9 & B & 9 & 1 & 3 \end{array}$$

Com que $9 \cdot 4 = 36$, $Y_4 = 6$. A més, com que $7 + 4 = 11$ i en portes 1, tenim que $Y_4 + X_3 + 1 = 9$, és a dir, $6 + X_3 + 1 = 9$ d'on es dedueix que $X_3 = 2$. D'altra banda, com $9 \cdot 3$ són 27 i en portem 2, al ser X_3 igual a 2, només queda que $B = 0$.

Aleshores tenim:

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 0 & 9 & 1 \\ & & & & 4 & 3 \\ \hline & X_1 & X_2 & 2 & 7 & 3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & 6 & 4 & \\ \hline 3 & 9 & 0 & 9 & 1 & 3 \end{array}$$

La resta de la multiplicació queda de la següent forma:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 9 & 0 & 9 & 1 \\
 & & & & 4 & 3 \\
\hline
 & 2 & 7 & 2 & 7 & 3 \\
3 & 6 & 3 & 6 & 4 & \\
\hline
3 & 9 & 0 & 9 & 1 & 3
\end{array}$$

4. LLIURAR-SE DEL CÀSTIG

Solució: Hi ha 280 nombres naturals menors que 10.000 amb dos o més uns consecutius.

Fent casos podem arribar a la solució:

Quantitat d'uns junts	Forma	Quantitat de nombres
Sols dos 1 junts	0 _ _ 1 1	**1.** $10^2 - 10 = 90$
	0 _ 1 1 _	**2.** $10^2 - 10 - 10 + 1 = 81$
	0 1 1 _ _	**3.** $10^2 - 10 = 90$
Sols tres 1 junts	0 _ 1 1 1	**4.** $10 - 1 = 9$
	0 1 1 1 _	**5.** $10 - 1 = 9$
Quatre 1 junts	0 1 1 1 1	**6.** 1
		Total: 280

- Notem que en els casos 1 i 3 el que fem és calcular quants nombres poden anar en l'espai en blanc (10 en cada cas) i restar-li els nombres que farien que aparegueren més de dos 1 junts (que en són 10 més, 00111, 01111, 02111...09111).
- En el cas 2, el que fem és el mateix que abans però ara restant-li dues vegades 10 ja que es poden formar més de dos 1 tant en l'espai en blanc de la dreta com en el de l'esquerra. A més, sumem 1 ja que el nombre 01111 el restem dues vegades.
- En els casos 4 i 5 calculem quants nombres poden anar en l'espai en blanc i llevem el 01111 ja que conté més de tres 1 seguits.
- I, per últim, en el cas 6 només hi ha un nombre que puga tenir quatre 1 seguits ja que la resta serien majors que 10000.

5. TRAJECTE A L'INSTITUT

Solució: Tardaran 10 minuts a trobar-se.

Sabem que Hèctor tarda 20 minuts a arribar; per tant, si considerem l'espai com una unitat i sabent que $v = \frac{e}{t}$, tindrem que la seua velocitat és de $\frac{1}{20}$ u/m. Per altra banda, Dani tarda 30 minuts; aleshores la seua velocitat és $\frac{1}{30}$ u/m.

Ara bé, com que Dani ix 5 minuts abans que el seu germà, té un avantatge de $5 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{6} u$ (utilitzant la fórmula de $e = v \cdot t$) del trajecte respecte al seu germà. Per tant, considerant la fórmula $e = e_0 + vt$ i suposant que e és la distància de casa a què es troben, plantegem la següent equació

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{30} \cdot t = \frac{1}{20} \cdot t$$

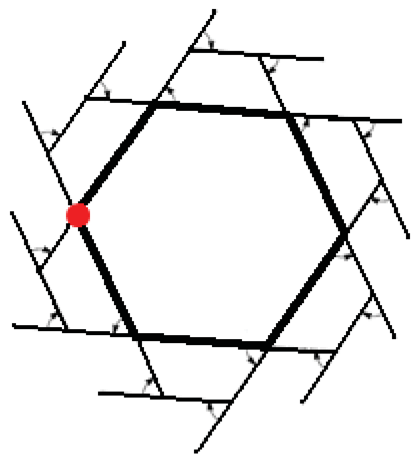
$$\frac{1}{20} \cdot t - \frac{1}{30} \cdot t = \frac{1}{6} \rightarrow t\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right) = \frac{1}{6}$$

$$t \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{6} \rightarrow t = \frac{60}{6} = 10 \text{ minuts.}$$

6. VALÈNCIA EN FALLES

Solució: A 0 metres.

Si anem completant el dibuix afegint les etapes de cada passeig, s'observa que es forma el següent dibuix cíclic, tornant al punt de partida.



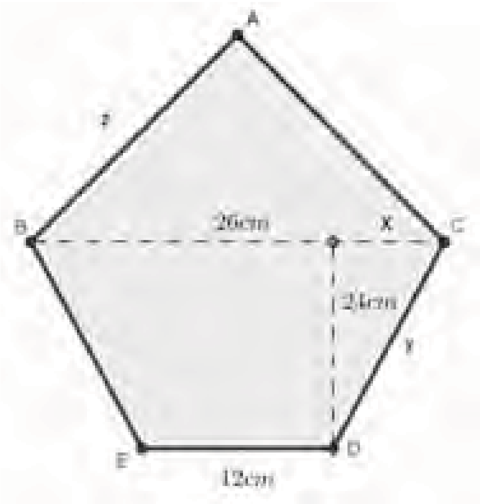
És a dir, cada 6 etapes, el turista torna al punt d'origen. Per tant, si realitza 3.000 etapes, fa $3.000 : 6 = 500$ voltes completes, la qual cosa indica que es troba al punt inicial; aleshores la distància és zero.

PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE VELOCITAT

1. EL GOT DE PAPER

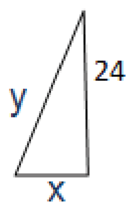
Solució: El perímetre de la figura és, aproximadament, 98,8 cm.



x: meitat de la diferència de les dues bases del trapezi.

y: costat del trapezi isòsceles.

z: catet del triangle rectangle en A i isòsceles.



Per Pitàgores,

$x = \frac{26-12}{2} = 7 \rightarrow y = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ cm

$26^2 = 2z^2 \rightarrow z \cong 18{,}4$ cm

$P \cong 12 + 25 + 25 + 18{,}4 + 18{,}4 = 98{,}8$ cm

2. ELS SOUS DE CARLA I MARTA

Solució: Marta guanya 810 € al mes.

Siga x: paga mensual de Marta (en €), y: paga mensual de Carla (en €)

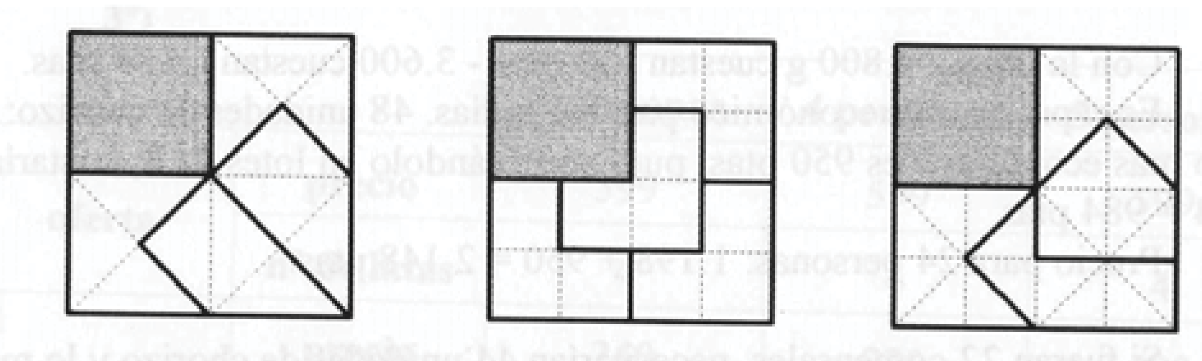
$$y = x - 180$$

Així que les quantitats s'igualen quan $7x = 9y$:

$$7x = 9(x - 180) \rightarrow 2x = 1\,620 \rightarrow x = 810 \text{ €}$$

3. EN EL QUADRAT

Solució: Es tracta de dividir els tres quadrats en 4 parts cada un i agafar-ne 3, o en 8 parts i agafar-ne 6, etc. Algunes solucions són:



La solució en què cada part té la mateixa forma és la del mig.

4. LA CLASSE

Solució: Les quatre primeres afirmacions són falses i l'última és verdadera.

De les dades del problema:

Han suspés anglés i matemàtiques:

$$\mathbf{70\%}\ \boldsymbol{de}\ \mathbf{40\%} = \frac{\mathbf{70}}{\mathbf{100}} \cdot \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}} = \frac{\mathbf{28}}{\mathbf{100}} = \mathbf{28\%} = \mathbf{21}\ \boldsymbol{alumnes}.$$

Han suspés anglés i han aprovat matemàtiques:

$$\mathbf{30\%}\ \boldsymbol{de}\ \mathbf{40\%} = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{100}} \cdot \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{100}} = \mathbf{12\%}$$

Per tant, fent una senzilla regla de proporcionalitat:

$$\left.\begin{array}{ccc} \mathbf{28} & \rightarrow & \mathbf{21} \\ \mathbf{12} & \rightarrow & \boldsymbol{x} \end{array}\right\} \rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{9} \text{ alumnes}$$

Han suspés anglés: $\mathbf{40\%} = \mathbf{21} + \mathbf{9} = \mathbf{30}$ alumnes.

Han aprovat anglés: $\mathbf{60\%}$

Per tant:

$$\left.\begin{array}{ccc} \mathbf{40} & \rightarrow & \mathbf{30} \\ \mathbf{60} & \rightarrow & \boldsymbol{x} \end{array}\right\} \rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{45} \text{ alumnes}$$

El nombre total d'alumnes serà 30 + 45 = 75. Per tant les frases:

a) 45 alumnes ha suspés anglés. →FALSA

b) 30 alumnes ha aprovat anglés. → FALSA

c) La classe té 100 alumnes. → FALSA

d) 10 alumnes han suspés anglés i han aprovat matemàtiques. → FALSA

e) Cap de les afirmacions anteriors és verdadera. → VERDADERA

5. ASPERSORS EN EL JARDÍ

Solució: L' àrea que es queda sense regar és $\boldsymbol{24\sqrt{3} - 12\pi \simeq 3,87}$ **m².**

L'àrea de l'hexàgon es pot calcular com la suma de les àrees de 6 triangles equilàters de costat 4 metres:

- Àrea de l'hexàgon = $6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$ m²

La zona que rega cada un dels sis aspersors que estan en els vèrtexs és un sector circular de 2 metres de radi i 120° d'angle. Tots els sectors equivalen a dos cercles d'igual radi:

- Àrea dels dos cercles = $2\pi r^2 = 2\pi 2^2 = 8\pi$ m²

Més l'àrea del cercle que rega l'aspersor central:

- Àrea del cercle central = $\pi r^2 = \pi 2^2 = 4\pi$ m²
- Àrea regada = 12π m²

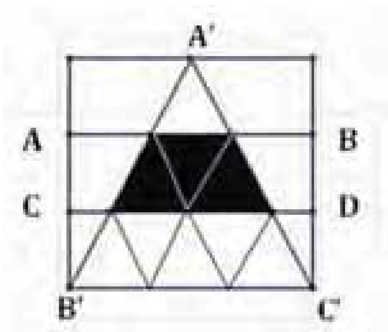
Àrea que es queda sense regar:

- Àrea de l'hexàgon − Àrea regada = $24\sqrt{3} - 12\pi \simeq 3,87$ m²

6. L'ÀREA DEL TRAPEZI

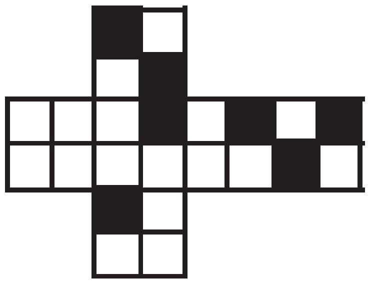
***Solució: L' àrea del trapezi és 10* cm².**

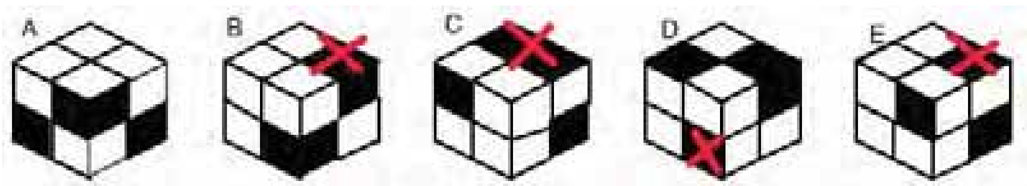
El triangle A'B'C' és la meitat del quadrat, aleshores té 30 cm² d'àrea. El triangle es pot dividir en 9 triangles petits, tots de la mateixa superfície, corresponent 3 d'eixos triangles a la part ombrejada. Per tant, la solució és 10 cm².



7. EL CUB

Solució: L'únic que no té incongruències és l'A.





NOTA: “Quadrat del croquis”: és la figura que correspon a la cara del cub i està format per quatre quadrats alternant els colors blanc o negre.

La figura B no és ja que les cares laterals corresponen per orientació al segon quadrat (d’esquerra a dreta) i al quadrat superior del croquis del cub; per tant, la cara superior hauria de ser la blanca.

La figura C no és ja que no n’hi ha cap cara que tinga 2 quadrats negres adjacents.

La figura D no és ja que per orientació la cara superior correspon al quadrat superior del croquis i la cara lateral dreta, al quadrat central. Hauria de veure’s el quadrat blanc del croquis.

La figura E no és ja que les cares laterals del cub corresponen al quadrat inferior del croquis i el segon quadrat del croquis (d’esquerra a dreta), i la cara superior hauria de ser totalment blanca.

8. SUMANT

Solució: La suma total és 9.053.

El nombre $\frac{1}{14} \cong 0{,}0714285714285 = 0{,}0\widehat{714285}$ és periòdic mixt. La suma dels 2 primers dígits és 0. La suma dels 6 dígits del període és 27.

Dividim 2.012 entre sis per veure els grups que es formen:

$$2.012 = 335 \cdot 6 + 2$$

És a dir, es formen 335 grups i sobren 2 xifres.

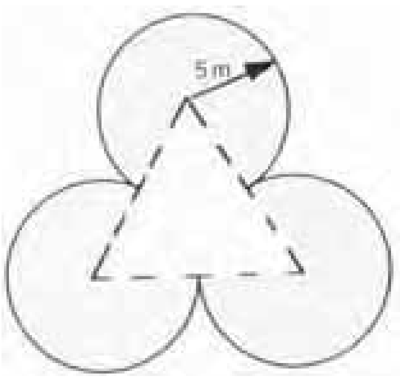
La suma dels 335 grups de sis xifres és $335 \cdot 27 = 9.045$

La suma de les dos xifres següents és $7 + 1 = 8$.

La suma total dels 2.014 primers dígits és igual a: $0 + 9.045 + 8 = 9.053$.

9. LA GRAN FONT

Solució: La font té aproximadament una capacitat de 196.350 litres.



La superfície de la font s'obté a partir dels 3 sectors circulars de 300º:

$$A = 3 \cdot \frac{300\pi \cdot 5^2}{360} \cong 196{,}35 \text{ m}^2$$

Com la profunditat de la font és d'un metre, aleshores:

$$V \cong 196{,}35 \text{ m}^3 = 196.350 \text{ dm}^3 = 196.350 \text{ l}$$

10. LA NOTA

Solució: La nota de l'última gimnasta és 9.

Siguen a, b, c, d i e les qualificacions de les 5 components de l'equip.

$$\frac{a + b + c + d + e}{5} = 7$$

Així,

$$(a + b + c + d) + e = 35 \rightarrow e = 35 - (a + b + c + d)$$

Si la mitjana aritmètica de les quatre primeres components és 6,5:

$$\frac{a + b + c + d}{5} = 6{,}5 \rightarrow a + b + c + d = 26$$

Per tant, la nota de l'última gimnasta serà:

$$e = 35 - (a + b + c + d) = 35 - 26 = 9.$$

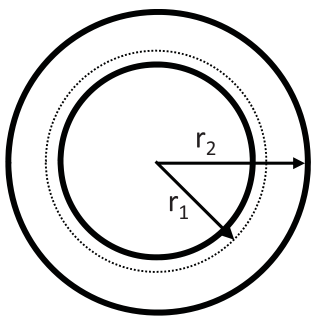
PROBLEMES DE NIVELL A
(PRIMER CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. LA ZONA ENJARDINADA

Solució: a) 254,56 m², aproximadament. b) 119.645 l, aproximadament.

a) Amb mesures directes obtenim el radi del jardí i el radi del jardí més la corona:



Valors mesurats:

- $r_1 \cong 9{,}1$ m (COMPTE: r_1 ha de contenir també la part de formigó que rodeja la part enjardinada, fins arribar a la corona).
- $r_2 \cong 12{,}8$ m

El perímetre de la corona circular és la suma del perímetre de la circumferència interior (de radi r_1) i el de la circumferència exterior (de radi r_2). Per tant: $P = P_1 + P_2 = \boldsymbol{2\pi}(r_1 + r_2) \cong \mathbf{137,60\ m^2}$,

L'àrea la calculem com: $\boldsymbol{A = A_2 - A_1 = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)} \cong \mathbf{254,5633\ m^2}$

b) El volum el calcularem com $V = A \cdot h$

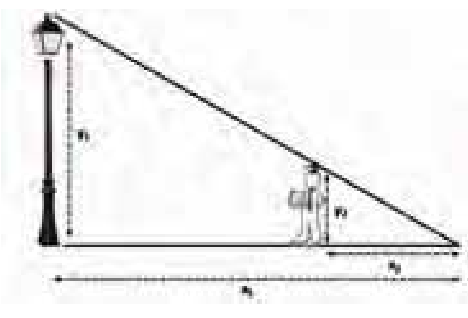
Mesurem l'altura de la corona, que val $h \cong 0{,}47$ m. Per tant:

$$V = A \cdot h \cong 119{,}644729\ \text{m}^3 \cong 119.645\ \text{l}.$$

ESTACIÓ 2. MESUREM FANALS

Solució: Aproximadament 6,75 m.

El procediment i el resultat final ha de ser el que es representa en la figura. Heu de mesurar l'ombra del fanal ($\boldsymbol{x_1}$), l'ombra d'un d'ells ($\boldsymbol{x_2}$), i la seua altura ($\boldsymbol{y_2}$), i aplicar la propietat de proporcionalitat en la semblança de triangles.



Les mesures concretes depenen dels alumnes i la seua alçada, però el resultat final ha de ser aproximadament:

$$\frac{\boldsymbol{y_1}}{\boldsymbol{y_2}} = \frac{\boldsymbol{x_1}}{\boldsymbol{x_2}} \rightarrow \boldsymbol{y_1} = \frac{\boldsymbol{x_1 y_2}}{\boldsymbol{x_2}} \cong \mathbf{6,75}\ \boldsymbol{m}$$

ESTACIÓ 3. QÜESTIÓ DE COMPTAR

Solució:

QÜESTIÓ PRÈVIA: La diferència horària és de 2 h 15 min.

a) $P = \frac{3}{28} \cong 0{,}1071 \ \rightarrow 10{,}71\%$

b) Aquesta és la situació cada 15 minuts:

Temps	Blau	Roig	Gris	Negre	Blanc	Groc
0’	10	7	5	3	2	1
15’	9	7	5	3	2	2
30’	8	7	5	3	3	2
45’	7	7	5	3	3	3
1 h	6	7	5	3	4	3
1 h 15’	6	6	5	3	4	4
1 h 30’	5	6	5	4	4	4
1 h 45’	5	5	5	4	5	4
2 h	5	5	5	4	4	5
2 h 15’	4	5	5	4	5	5

c) Sí, els de color gris. No s’estabilitzarà mai a causa del criteri de selecció en cas d’empat de colors (sempre variaran els cotxes de color blanc).

ESTACIÓ 4. OLIMPÍADA DE NATACIÓ

Solució: 86 possibilitats.

Si organitzem les dades en una taula, on en cada fila indiquem el carrer del nadador valencià 1 i en cada columna el carrer del nadador valencià 2 (compte, perquè importa l'ordre, i, per exemple, la combinació (9,2) no és la mateixa que la (2,9)), arribarem a la solució fàcilment:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**Tot**
1		(1)	(1)	(1)	(1)	(1)		(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	**0**
2	(1)		(2)	(1)	(2)	(1)		(1)		(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	**1**
3	(1)	(2)			(2)	(1)			(1)		(2)	(1)	(2)		**4**
4	(1)	(1)						(1)				(1)			**8**
5	(1)	(2)	(2)							(1)	(2)		(2)		**6**
6	(1)	(1)	(1)									(1)			**8**
8	(1)	(1)		(1)											**9**
9	(1)		(1)												**10**
10	(1)	(1)			(1)										**9**
11	(1)	(2)	(2)		(2)								(2)		**7**
12	(1)	(1)	(1)	(1)		(1)									**7**
13	(1)	(2)	(2)		(2)						(2)				**7**
14	(1)	(1)													**10**

En total, hi ha **86 possibilitats.**

No pot ser per:

(1) un dels carrers és divisor de l'altre.

(2) els dos carrers són nombres primers.

ESTACIÓ 5. MOSAICS I PAPERERES

Solució:

a) La unitat mínima de repetició del mosaic és:

en qualsevol de les seues rotacions.

b) El radi de les papereres mesura $r = 21$ cm i l'altura $h = 53$ cm.

La superfície d'un cilindre és un rectangle amb ample la longitud de la circumferència i d'altura h.

$$\boldsymbol{A = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 21 \cdot 53 \cong 6.993,19\ \mathrm{cm}^2}$$

Multipliquem pel nombre de papereres que hi ha al vestíbul, i s'obté el resultat.

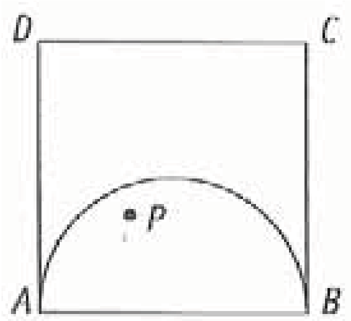
NOTA: Com que no hem pogut entrar al vestíbul en la fase de preparació, cal comptar "in situ" quantes papereres hi ha i obtenir la solució final.

PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA INDIVIDUAL

1. OBTÚS

Solució: La probabilitat és $\pi/8$.



L'angle ∠APB és recte justament quan P es troba sobre el cercle amb diàmetre AB. Per tant ∠APB és obtús justament quan P es troba dins del disc semicircular S de diàmetre AB. Per tant, la probabilitat que l'angle ∠APB siga major de 90° és:

$$P = \frac{A(S)}{A(ABCD)} = \frac{\pi r^2/2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{8}$$

2. UN DIA EN LES CARRERES

Solució: 7 és el mínim nombre de carreres que s'han de fer.

El procediment és aquest.

- Fem 5 grups de cinc cavalls.
- Escollim el més ràpid de cada grup i fem una altra carrera amb ells.
- Els cavalls dels grups que han acabat en la 4a i 5a posició d'aquesta carrera no poden estar en el pòdium. Per tant estan descartats.
- El cavall que acaba 3r pot estar en el pòdium, però cap dels cavalls que estan en el seu grup (són més lents que ell).
- El cavall que ha acabat en 2a posició i el que va quedar segon dins del seu grup poden estar en el pòdium.
- El cavall que acaba el primer és el més ràpid. Els cavalls que van acabar segon i tercer en el seu grup poden estar en el pòdium.
- Agafem els cinc cavalls que poden estar al pòdium i fem una carrera entre ells. Així trobem els dos cavalls que ens falten.

3. OMPLINT EL CILINDRE

Solució: Tardarà 1 h 7 m 9 s.

El volum del cilindre és aproximadament 785,4 l.

Fem una taula com aquesta:

n	MINUTS	LITRES	l/m
	1	1	+1
	2	2	+1
1	**3**	**3**	**+1**
	4	5	+2
	5	7	+2
2	**6**	**9**	**+3**
	7	12	+3
	8	15	+3
3	**9**	**18**	**+4**
…	…	…	…
4	**12**	**30**	**+5**
…	…	…	…
5	**15**	**45**	**+6**
…	…	…	…
6	**18**	**63**	**+7**
…	…	…	…
21	**63**	**693**	**+22**
…	…	…	…
22	**66**	**759**	**+23**
	67	782	+23

Per a calcular els segons, amb una senzilla regla de tres obtenim que 3,4 l s'omplin en uns 8,87 segons.

Per tant, es tarden 67 minuts i 9 segons aproximadament: 1 h 7 m 9 s

NOTA: El problema es resol fàcilment si se sap que $S_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

4. LA VIDRIERA

Solució: Necessitem $\pi - \sqrt{3}\ m^2 \cong 1,41\ m^2$.

Sabent que l'àrea de l'estrella de color salmó, A, es pot dividir en 12 parts iguals podem deduir l'àrea de cada una de les parts: a = A/12. Observem en la figura triangles equilàters xicotets i grans.

L'àrea de qualsevol dels triangles xicotets de costat b es: $a = \frac{1}{2} b \cdot \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{4}}$ o també $a = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$ i com que a = A/12 podem obtindre $b = \sqrt{\frac{A}{3\sqrt{3}}}$.

Per semblança de triangles podem obtenir el costat del triangle equilàter gran: el seu costat és tres vegades el del triangle xicotet.

$$B = 3\sqrt{\frac{A}{3\sqrt{3}}} = \sqrt{\sqrt{3}A}$$

Donat el costat, es fàcil obtenir l'altura del triangle equilàter gran:

$$\mathrm{H} = \sqrt{B^2 - \frac{B^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}B}{2}$$

Substituint B pel seu valor obtenim:

$$H = \frac{\sqrt{3}B}{2} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}A}}{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{3}A}}{2}$$

Atès que $A = \sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$ obtenim $H = \frac{3}{2}$ m.

El radi del cercle està situat al baricentre del triangle equilàter gran, per aquesta raó el radi coincidirà amb 2/3 de l'altura H. Per tant R = 1 m i l'àrea de la part transparent que volem canviar serà:

$$S = \pi(1)^2 - \sqrt{3} = \pi - \sqrt{3} \cong 1{,}41\ \mathrm{m}^2$$

5. ELS QUATRE NOMBRES MISTERIOSOS

Solució: 15/2.

Les sis possibles sumes són $w + x, w + y, w + z, x + y, x + z, y + z$.

Com $x < y \rightarrow w + x < w + y$.

Com $w < x \rightarrow w + y < x + y$.

Com $y < z \rightarrow \; x + y < x + z$.

Com $x < y, x + z < y + z$.

Per tant, $w + x < w + y < x + y < x + z < y + z$.

Aquesta llista inclou totes les sumes excepte $w + z$.

Com $y < z$ i $w < x$, aleshores $w + y < w + z < x + z$, però no podem dir amb seguretat si $x + y$ és o no major que $w + z$.

Per tant, sabem que $w + x$ és sempre la suma menor i que w + y és sempre la segona suma més menuda. A més, sabem que les sumes tercera i quarta més menudes són $w + z$ i $x + y$ en algun ordre.

Podem concloure que $w + x = 1$ i $w + y = 2$, i $w + z$, $x + y$ són la tercera i quarta en algun ordre.

De la primera i segona equacions, $(w + y) - (w + x) = 2 - 1$, és a dir $y – x = 1$.

<u>Cas 1</u>: $w + z = 3 \,, x + y = 4$

Com $y – x = 1$, $x + y = 4$, podem sumar aquestes dues expressions per obtenir $2y = 5$ i, per tant, $y = \frac{5}{2}$.

Com $w + y = 2 \; \rightarrow w = 2 - y = 2 - \frac{5}{2} = \; -\frac{1}{2}$.

Com $w + z = 3 \rightarrow \; z = 3 - w = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$.

Com $x + y = 4 \rightarrow x = 4 - y = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$.

Per tant, tenim $w = -\frac{1}{2}, \; x = \frac{3}{2}, \; y = \frac{5}{2}, \; z = \frac{7}{2}$.

Podem comprovar que les sis sumes són 1, 2, 3, 4, 5 i 6, totes diferents, com especificava l'enunciat.

<u>Cas 2</u>: $w + z = 4, \; x + y = 3$

Com $y - x = 1$ i $x + y = 3$, podem sumar les expressions. Obtenim $2y = 4$. Per tant, $y = 2$.

Com $w + y = 2 \rightarrow w = 2 - y = 2 - 2 = 0$.

Com $w + z = 4 \rightarrow \; z = 4 - w = 4 - 0 = 4$.

Com $x + y = 3, \rightarrow x = 3 - y = 3 - 2 = 1$.

Per tant, tenim $w = 0, \; x = 1, \; y = 2, \; z = 4$.

Podem comprovar que les sis sumes són 1, 2, 3, 4, 5 i 6, que són diferents, com especificava l'enunciat.

Per tant, els dos possibles valors de z són 4 y $\frac{7}{2}$.

La suma d'aquests valors és $4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$.

6. LA TESSEL·LA

Solució: L'àrea de la tessel·la mesura $\boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{3}\ u.s}$.

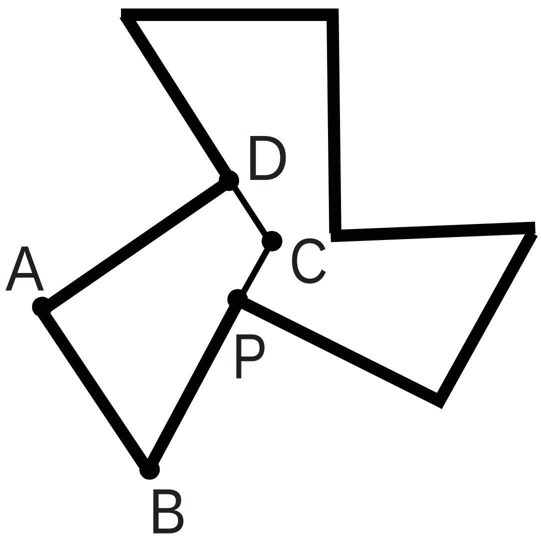
Considerem el quadrilàter ABCD, d'on podem obtenir la següent informació:

$$\angle DCB = 120°,\ \angle DAB = 90°,\ \ \angle ADC = 90°$$

Aleshores, el quadrilàter és un trapezi rectangular.

$$\angle ABC = 180° - \angle DCB = 60°$$

Podem també observar que: $\overline{DC} = \overline{CP} = x$

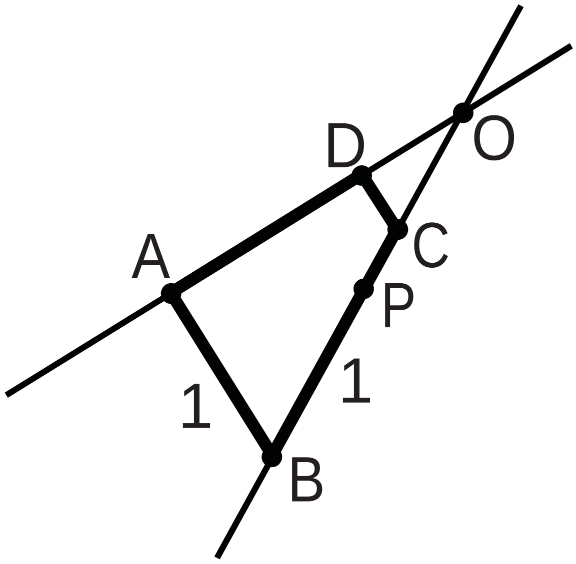


Prolonguem els costats $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ que es tallen en el punt O.

$$\overline{BO} = 2 \cdot \overline{AB} = 2, \overline{AO} = \sqrt{3}$$

$$\overline{BC} = 1 + x, \overline{OC} = 1 - x$$

Els triangles rectangles ABO, DCO són semblants.



Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{2}$$

Resolent aquesta equació: $x = 1/3$

$$\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{AO} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{AD} = \overline{AO} - \overline{OD} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \cdot \overline{AD} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$$

L'àrea de la tessel·la és:

$$S = 3 \cdot S_{ABCD} = 3 \cdot \frac{4}{9}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\ \mathrm{u.s.}$$

PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE VELOCITAT

1. LA XIFRA OCULTA

Solució: La xifra de les unitats és 0.

$9^{21}+9^{22}+9^{23}+9^{24}=9^{21}(1+9)+9^{23}(1+9)=10(9^{21}+9^{23})$. Com que ha de ser múltiple de 10, la xifra de les unitats serà 0.

2. EL TESTAMENT

Solució: El senyor Enric tenia 9 fills.

Siga x la quantitat total de diners, i siga y la quantitat que cada fill rep. Així:

El primer fill rep $y=1000+\frac{1}{10}(x-1000)$.

El segon fill rep $y=2000+\frac{1}{10}(x-2000-y)$.

Tenim, per tant, un sistema de dues equacions amb dues incògnites. Resolent-lo per qualsevol mètode apleguem a la solució $x=81.000$ i $y=9.000$. Per tant, l'herència ascendia a 81.000 € i a cada fill li corresponen 9.000 €. Això vol dir que hi havia $\frac{81000}{9000}=9$ fills.

3. DUES DIVISIONS

Solució: El nombre m pot prendre els valors 17 i 51.

$$\begin{matrix} 319=k\cdot m+13 \\ 370=k'\cdot m+13 \end{matrix} \Longrightarrow 370-319=(k'-k)m \Longrightarrow 51=(k'-k)m$$

El nombre m ha de ser divisor de 51. Per tant, serà 1, 3, 17 o 51.

No pot ser 1 ni 3 ja que la resta és 13.

Provem a dividir per 17 i tenim: $319=18\cdot 17+13$ i $370=21\cdot 17+13$.

Si provem a dividir per 51 tindrem $319=6\cdot 51+13$ i $370=7\cdot 51+13$.

Hi ha dos possibles valors: $m=17$ i $m=51$.

4. QUATRILOTO

Solució: La probabilitat de ser premiat és 9/64.

Les probabilitats que coincidisquen 2 nombres exactament són:

$$P(1r, 2n, no3r) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$$

$$P(1r, no2n, 3r) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$$

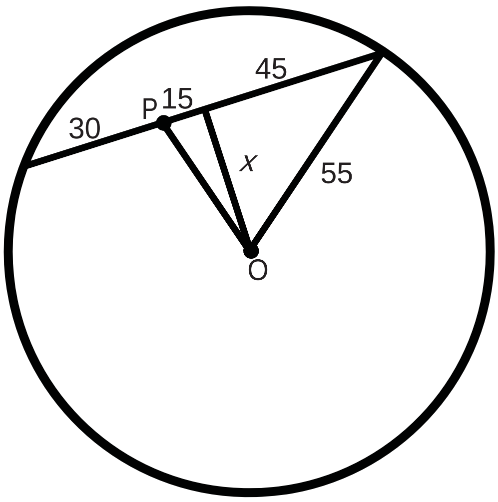
$$P(no1r, 2n, 3r) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$$

$$P(dos\ encertats\ i\ un\ no) = 3\frac{3}{64} = \frac{9}{64}$$

5. EL PUNT I LA CORDA

Solució: 35 cm.

Tracem el radi (de 55 cm) i l'altura, x, del triangle que es forma.



La recta sobre la qual es troba aquesta altura és la mediatriu de la corda, de manera que el triangle rectangle que es forma té costats 45, x i 55, d'on podem obtenir el valor de x aplicant el teorema de Pitàgores:

$$x = \sqrt{55^2 - 45^2} = 10\sqrt{10} \text{ cm}$$

I, aplicant de nou el teorema de Pitàgores a l'altre triangle rectangle, obtenim $\overline{OP}$:

$$\overline{OP} = \sqrt{\left(10\sqrt{10}\right)^2 + 15^2} = 35 \text{ cm.}$$

6. PARÀBOLA INTALLABLE

Solució: El valor demanat és k = 2

Si la paràbola no talla l'eix horitzontal, el discriminant ha der ser negatiu:

$$(-8)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (2k - 1) < 0 \Longrightarrow 64 - 48k + 24 < 0 \Longrightarrow 88 < 48k$$

$$\frac{88}{48} < k \to \frac{11}{6} < k$$

I el menor nombre enter que ho compleix és el 2.

7. QUATRES, QUATRES I MÉS QUATRES

Solució: El dígit 4 apareix 602 vegades.

Dels diferents procediments de resolució que es poden aplicar en aquest problema, nosaltres hem triat comptar per intervals:

Interval	1-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
N. de 4	1	1	1	1	11	1	1	1	1	1

Observem que en l'interval 1-99 trobem 20 vegades el nombre 4. El mateix passarà en els intervals 100-199, 200-299, 300-399, 500-599, 600-699, 700-799, 800-899, 900-999. És a dir, tindrem $8 \cdot 20 = 160$ vegades més el nombre 4.

Si analitzem el cas on la centena comença per 4, observem que obtenim 120 vegades el nombre 4.

Intervals	400-409	410-419	420-429	430-439	440-449	450-459	460-469	470-479	480-489	490-499
N. de 4	11	11	11	11	21	11	11	11	11	11

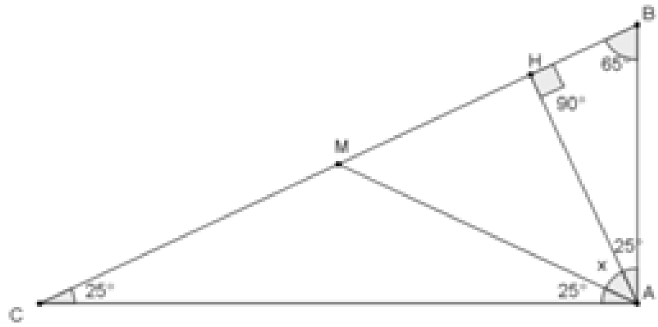
En els primers 1.000 nombres, el 4 apareix un total de 300 vegades, ja que $20 + 160 + 120 = 300$.

Aleshores, en els primers 2.000 nombres el trobarem 600 vegades, i fins arribar al 2.014 el trobarem 602 vegades.

8. UN TRIANGLE RECTANGLE

Solució: L'angle mesura* $40°$*.

Tracem l'altura i la mitjana tal com indica l'enunciat. D'una banda, el triangle AHB és semblant a l'original, ABC; per tant $\widehat{BAH} = 25°$. D'altra banda, per una propietat de la mitjana en un triangle rectangle, el triangle AMC és isòsceles. Per tant $\widehat{MAC} = 25°$.



Així, concloem que l'angle A, de 90°, es pot expressar com la suma $25° + + x + 25°$. Per tant, $x = 40°$.

9. FUNCIÓ DE L'ANY

Solució: $\boldsymbol{f(38) = 23.}$

$$2.014 = 38 \cdot 53$$

$$\begin{matrix} 2f(38) + f(53) = 3 \cdot 38 \\ 2f(53) + f(38) = 3 \cdot 53 \end{matrix} \rightarrow \text{ de la 1a equació: } f(53) = 114 - 2f(38)$$

I substituint en la 2a equació:

$$228 - 4f(38) + f(38) = 159 \Longrightarrow -3f(38) = -69 \Longrightarrow f(38) = 23$$

10. PUNT MITJÀ

Solució: El segment $\overline{AB}$ mesura $\mathbf{2\sqrt{2}}$ u. l.

Les coordenades del punt A, per estar sobre la recta r, seran de la forma $A = (a, 2a)$. Les coordenades del punt B, per estar sobre l'eix OX, seran de la forma $B = (b, 0)$.

Si el punt mitjà de AB és P, tenim que:

$$M_{AB} = P; \ \left(\frac{a+b}{2}, \frac{2a+0}{2}\right) = (2,1); \ \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 2 \\ \dfrac{2a}{2} = 1 \end{cases}$$

D'on obtenim $a = 1$ i $b = 3$. Així, $A = (1,2)$ i $B = (3,0)$. La longitud de AB serà el mòdul del vector $\overrightarrow{AB}$: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$ u. l.

PROBLEMES DE NIVELL B
(SEGON CICLE DE SECUNDÀRIA)

FASE AUTONÒMICA – PROVA DE CAMP

ESTACIÓ 1. L'EDIFICI RODÓ

Solució:

a. Volum de terra del cilindre (aproximat) on estan les palmeres:

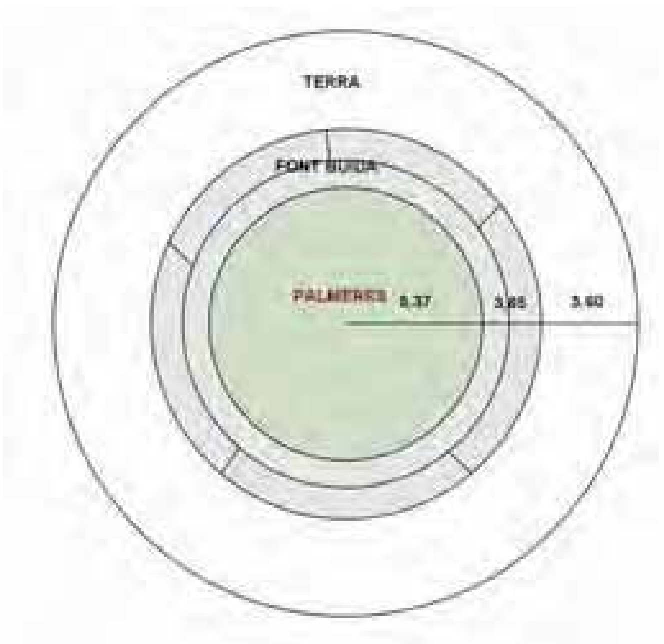
Longitud de la circumferència: 33,75 m

Radi del cercle: $r = \frac{33,75}{2 \cdot \pi} \cong 5,37$ m

Altura del cilindre: $h = 0,51$ m

Volum del cilindre: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot (5,37)^2 \cdot 0,51 \cong 46,202$ m^3

b.



Radi del recinte total: $5,37 + 3,65 + 3,60 = 12,62$ m

Àrea del cercle total: $\pi \cdot 12,62^2 \cong 500,3438$ m^2

Àrea de la corona circular: $\pi \cdot 9,02^2 - \pi \cdot 5,37^2 \cong 165,0074$ m^2

Probabilitat aproximada: $165/500 = 0,33 = 33\%$

ESTACIÓ 2. PARANIMF

Solució:

a. Es tracta de 5 persones diferents (A, B, C, D, E) i que volen entrar per 5 portes diferents. Tenim agrupacions diferents si canvia l'ordre d'elles.

   Per tant es tracta de $P_5 = 5! = 120$ possibilitats.

b. Al formar 2 grups, només cal comptar les possibilitats d'entrar els dos grups en les distintes portes (5). Com importa l'ordre, es tracta de comptar el grup de variacions de 5 elements presos de dos en dos:

$$V_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

   10 possibilitats.

ESTACIÓ 3. APARCAMENT DELS AUTOBUSOS

Solució: Tots podran aparcar en el lloc número 1 i, a més:

a. $0949 = 13 \cdot 73$. Pot aparcar en el lloc 13.
b. $1387 = 19 \cdot 73$. Pot aparcar en el lloc 19.
c. $1802 = 2 \cdot 17 \cdot 53$. Pot aparcar en els llocs 2, 17 i 34.
d. $5365 = 5 \cdot 29 \cdot 37$. Pot aparcar en els llocs 5 i 29.
e. $1343 = 17 \cdot 79$. Pot aparcar en el lloc 17.

ESTACIÓ 4. RELLOTGE DE SOL

Solució: Latitud aproximada: 39,5°.

Per a la segona pregunta cal que d'alguna manera s'explique la diferència entre l'hora oficial (temps solar mitjà) i l'hora solar local que, per decisió governamental, té en el moment actual un avançament de 2 hores.

A més a més, algú pot explicar que degut al moviment del Sol (diferents velocitats durant l'any) al voltant de la Terra, cal aplicar una correcció que ens dóna "l'equació del temps".

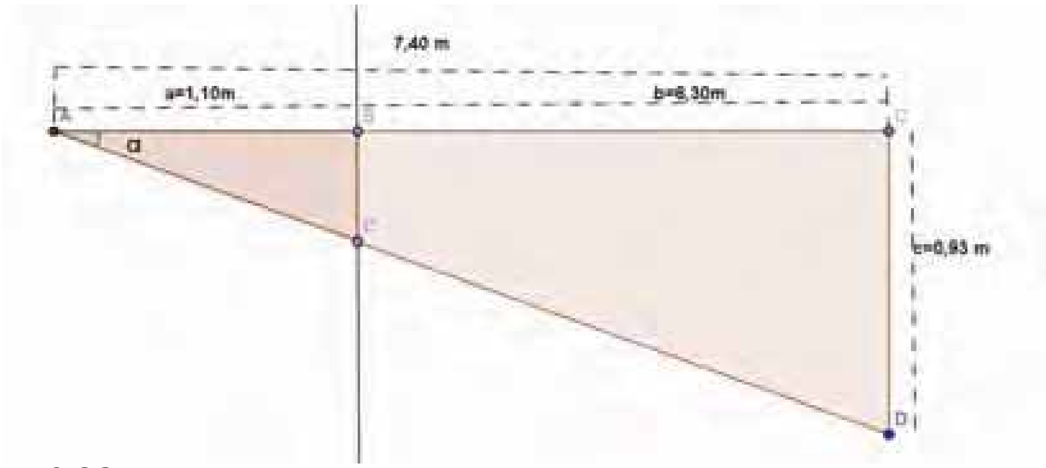
I una tercera raó perquè no marque l'hora exacta és que la longitud de l'hora oficial es refereix al meridià 0° (Greenwich) i per exemple en Xest estem en –0,65°.

ESTACIÓ 5. LA RAMPA DEL CAMÍ

Solució:

a. IMPORTANT: En l'observació dels alumnes, fixeu-vos que no utilitzen el telèfon mòbil, ja que n'hi ha aplicacions que trauen directament l'angle d'inclinació.

   Cap dels trams no arriba a ser un triangle rectangle. Es necessita prolongar el segment BC amb AB per obtenir el triangle rectangle desitjat:



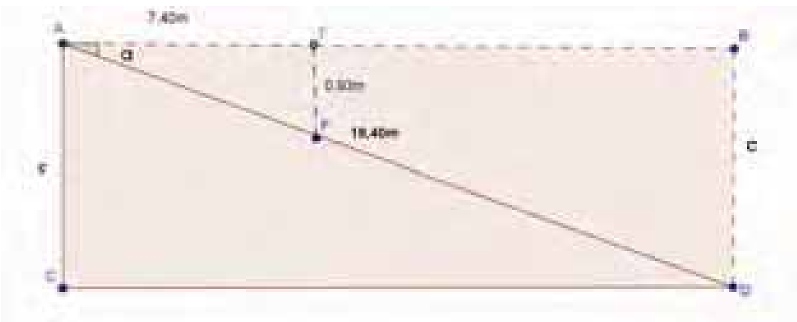
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{0{,}93}{7{,}40} = 0{,}12567\,\ldots \rightarrow \alpha = \text{arc tg}\,(0{,}12567\,\ldots) \cong 7^o\;9'\;47''$$

   Com els càlculs són aproximats, es donarà la sólució per vàlida si

   $6{,}7^o < \alpha < 7{,}7^o$

   Atenció: Si $\alpha > 7{,}7^o$ significa que no s'ha considerat adequadament el triangle en el plantejament.

b. La longitud de la rampa és aproximadament 19,40 m. Per tant, o bé per semblança de triangles rectangles amb un angle agut comú, o bé per raó trigonomètrica, el desnivell c és :



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{c}{19{,}40} = \frac{0{,}93}{7{,}40} \rightarrow c \cong 2{,}438\text{ m}$$

ACTUALITZEU ELS VOSTRES CORREUS ELECTRÒNICS...!!!

ATENCIÓ, SOCIS!!

Per tal d'actualitzar la nostra base de dades, us demanem que ens informeu de les possibles variacions en les vostres dades, especialment en les vostres adreces de correu electrònic.

És important tindre aquesta informació per a un millor funcionament de la societat. És suficient que envieu un correu electrònic a:

tresorer@semcv.org

indicant les vostres novetats.

Gràcies per la vostra col·laboració.

CONTACTEU AMB NOSALTRES...!!!

SI VOLS ENVIAR-NOS SOLUCIONS DE PROBLEMES OBERTS, PROPOSTES DE PROBLEMES O DE TEMES, COMENTARIS I SUGGERIMENTS POTS ENVIAR UNA CARTA A L'ADREÇA:

SEMCV "AL-KHWARIZMI"

PROBLEMA OBERT

APARTAT 22.045

46071 VALÈNCIA

TAMBÉ POTS ENVIAR UN MISSATGE AL CORREU ELECTRÒNIC:

problemesolimpics@semcv.org

ESPEREM LES VOSTRES COL·LABORACIONS!!!

S.
E.
M.
C.
V.
AL-KHWARIZMI

Vols fer-te soci? Ompli la següent butlleta d'inscripció i ens l'envies a la nostra seu. Anima als teus companys o inscriu al teu centre a la nostra societat.

INSCRIPCIÓ I DOMICILIACIÓ BANCÀRIA

SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA "Al-Khwārizmī"

Facultat de Magisteri "Ausiàs March"
Departament de Didàctica de la Matemàtica
Apartat 22.045 46071VALÈNCIA

Cognoms:..Nom:..................................
DNI / NIF:....................................

Domicili particular:

Població:...C.P.:..............
Carrer:.. Telèfon:...
Correu-e:...................................

Centre de treball:

Nom:...
Carrer:..Població:................................C.P.:...........
Telèfon:...Correu-e:...

Entitat bancària (on es lliurarà el cobrament de quotes):

Nom:...
Carrer:..Població:................................C.P.:..........
Codi Compte Client:

Entitat | | | | | Oficina | | | | | D.C. | | | Nº Compte | | | | | | | | | | |

....a...........de......................................de 2013.
(signatura)

El titular del compte:..
DNI:...

Esta revista es publica amb el suport de l'Acadèmia Valenciana de la Llengua

Trobaràs tota la informació en la nostra web.

Societat d'Educació Matemàtica
Comunitat Valenciana

Al-Khwarizmi

Visiteu-la: www.semcv.org

S.
E.
M.
C.
V.

AL-KHWARIZMI

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"