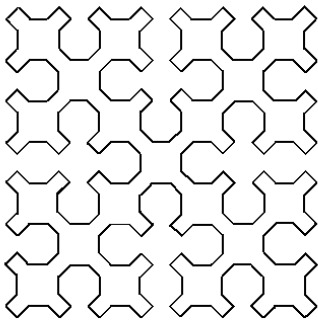

S.
E.
M.
C.
V.



AL-KHWARIZMI

P ROBLEMES O LÍMPICS

Revista de problemes de Matemàtiques
Número 1. Octubre 1999



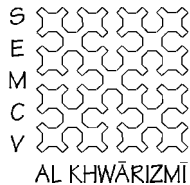
Un equip de professors i professores anem a treballar el present curs en la preparació d'activitats que ens servisquen com a model per a treballar amb els nostres alumnes de Secundària la resolució de problemes, i els distribuïrem en aquests llibrets amb el títol "Problemes Olímpics". El títol és indicador del tipus d'activitats que es tracta: són problemes que tenen un perfil semblant als que es proposen a l'Olimpíada Matemàtica. Així, ens hem marcat com objectius del treball deixar definit qui és aquest perfil (al nostre entendre), elaborar activitats que responguen al perfil definit, i portar endavant l'Olimpíada Matemàtica al nostre Centre amb els nostres alumnes per tal de participar en la convocatòria de la XI OLIMPÍADA MATEMÀTICA de la Societat "Al-Khwarizmi".

Com tots sabeu ja, l'any 2000 ha sigut declarat per la UNESCO any mundial de les matemàtiques. Una manera de contribuir a la seua celebració consisteix en realitzar al nostre Centre l'Olimpíada Matemàtica. Com es pot fer? Dins de la setmana cultural, per exemple, el Seminari o Departament de Matemàtiques convoca a tots els alumnes del Centre a participar realitzant una selecció per a que representen al Centre en la fase provincial de l'Olimpíada Matemàtica. Recordeu que els nostres objectius són:

1. Afavorir la participació de l'alumnat i el professorat en totes les fases d'aquesta Olimpíada Matemàtica.
2. Afavorir que l'alumnat gaudisca amb les Matemàtiques, així com presentar una visió complementària a l'utilitzada a l'aula.
3. Afavorir al nostre País una actitud positiva cap a les matemàtiques en l'alumnat, el professorat i la societat en general.
4. Afavorir l'esperit cooperatiu, potenciant les modalitats de participació en equip, i proporcionant a tots els participants l'ocasió de fer matemàtiques amb plaer.
5. Promoure la incorporació de la resolució de problemes i l'ús de tecnologia a les classes de matemàtiques, divulgant els materials generats a l'Olimpíada Matemàtica entre el professorat.
6. Afavorir les relacions d'amistat i coneixement entre els joves del nostre País.

Esperem la vostra col·laboració participant amb els vostres alumnes en l'edició d'enguany de l'Olimpíada. Vos recorde que les fases provincials i autonòmica se celebraran en el mes de Maig del proper any 2.000 i la fase nacional, que enguany se realitza a Catalunya, se celebrarà en el mes de Juny. Pròximament rebreu el model d'inscripció, però sabeu que en la nostra pàgina web (www.semcv.org) també la podreu trobar. Salut a tots.

Per la comissió organitzadora: Tomás Queralt



X OLIMPÍADA MATEMÀTICA
PROVINCIA DE VALÈNCIA - FASE COMARCAL
8 DE MAIG DE 1999 - PROVA INDIVIDUAL

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

1.- Quants números de tres xifres hi ha que aconsegueixen la propietat de que la suma de la xifra de les centenes i la de les desenes ens dona la xifra de les unitats?

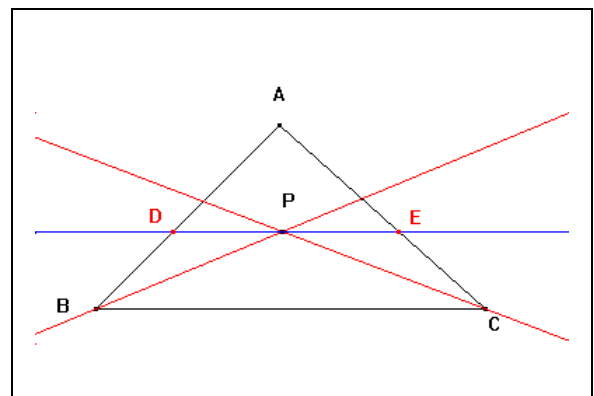
2.- En l'etapa contra-rellotge d'una carrera ciclista, un corredor vol arribar a una velocitat mitjana de 40 km per hora entre dos ciutats A i C que disten 10 km. A meitat camí entre A i C hi ha una altra ciutat B que es troba en el punt més alt del recorregut. En arribar a B el ciclista calcula que fins eixe moment la seua velocitat mitjana ha sigut sols de 20 km per hora. A quina velocitat ha de pedalejar en la baixada de B a C, si vol aconseguir l'objectiu de arribar a una velocitat mitjana de 40 km per hora entre A i C?



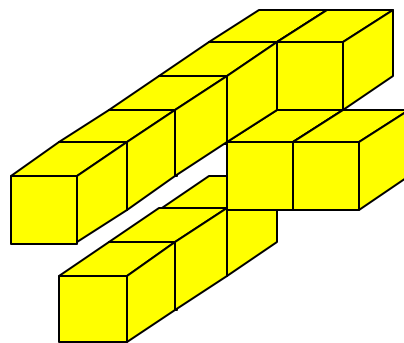
3.- Escriu números enters positius en les caselles buides de manera que la suma de tres caselles consecutives siga sempre la mateixa, i la suma total siga igual a 217.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
			17				20					

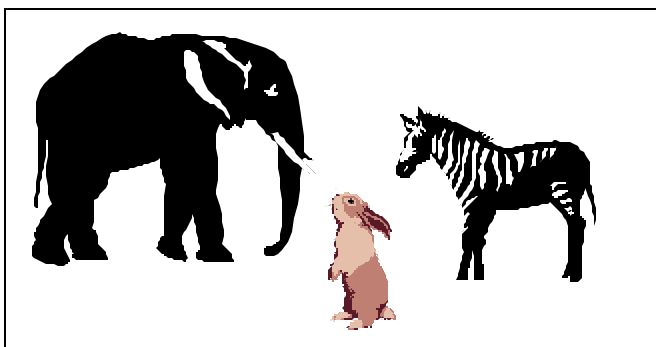
4.- En el triangle ABC es dibuixen les bisectrius dels angles $\hat{B}$ i $\hat{C}$, que es tallen en el punt P. Per P es dibuixa una paral·lela a BC que talla al costat AB en D i al costat AC en E. Se sap que $BD = 5.3$ i $CE = 7.8$. Calcula la mesura del segment DE.



- 5.- Dibuixa les vistes de front, de la dreta, de l'esquerra i de darrere de la figura del dibuix (hi ha onze cubs).



- 6.- La zebra, l'elefant i el conill del zoològic esta a dieta de carlotes. El conill menja en un any (365 dies) la mateixa quantitat de carlotes que el elefant menja en dos dies i el que menja l'elefant en un dia coincideix el que menja la zebra en 5 dies.

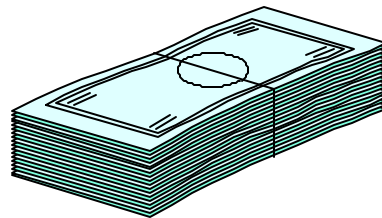


En un dia l'elefant, la zebra i el conill mengen 55 kg. De carlotes. Quan menja cadascun per dia?



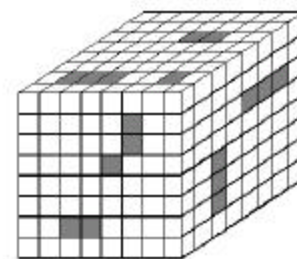
PROBLEMES NIVELL B (4RT. ESO)

- 1.- Mireia té 20 bitllets. Uns són de 10 euros, altres de 20 euros i alguns de 50 euros, per un total de 500 euros. Si té més bitllets de 50 euros que de 10 euros, quants bitllets té de cada tipus?



- 2.- Siga ABC un triangle isòsceles amb $AB = AC$. Es traça la bisectriu de l'angle $\hat{B}$ que talla al costat AC en D. Sabent que $BC = BD$, calcula quant mesura l'angle $\hat{A}$.

3.- En el següent cub, tots els cubs menuts són blancs o negres. Les files (horitzontals o verticals) que tenen els seus extrems negres, estan constituïdes per cubs menuts que són tots negres. Tots els altres cubs són blancs.



- Quants cubs menuts blancs hi ha?
- Es lleva una capa de cubs menuts de cadascuna de les sis cares del cub gran. Fer el dibuix del nou cub.

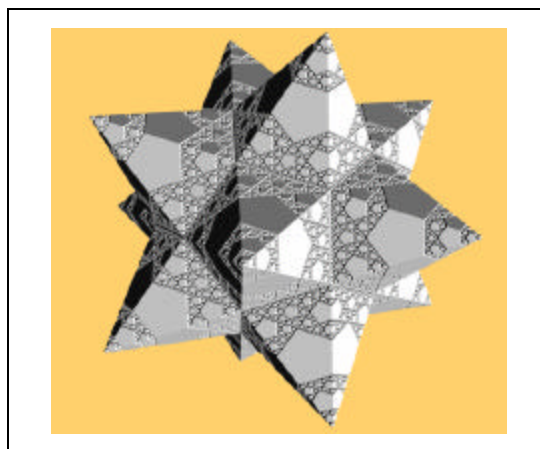
4.- Numera de 1 a 8 els vèrtex i els costats d'un quadrat, de manera que els quatre números que s'obtenen en sumar el número corresponent a cada costat més els dos dels seus extrems siga sempre igual.

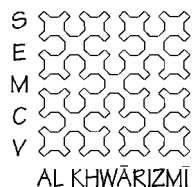
5.- Siga N el número que resulta de escriure els números enters de 1 a 1000 en forma consecutiva (123456789101112...). Trobar la suma de les xifres d'N.

6.- Ana ha d'escriure un treball d'n pàgines. El dilluns escriu la meitat del treball. El dimarts la tercera part de lo que li falta; el dimecres la quarta part de la resta i el dijous la quinta part del que li queda per fer. El divendres decideix acabar el treball i observa que li queden menys de 15 pàgines per a acabar-lo.



Si tots els dies ha escrit un número enter de pàgines, quantes pàgines tenia el treball i quantes va fer el divendres?



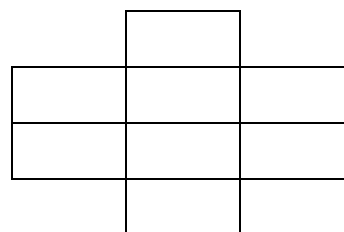


X OLIMPIADA MATEMÀTICA
PROVINCIA DE VALÈNCIA - FASE COMARCAL
8 DE MAIG DE 1999 - PROVA PER EQUIPS

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

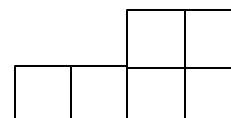
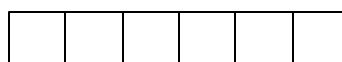
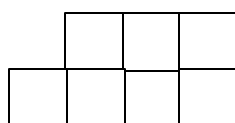
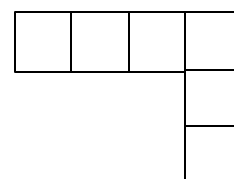
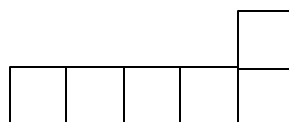
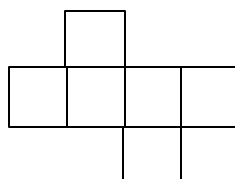
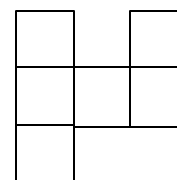
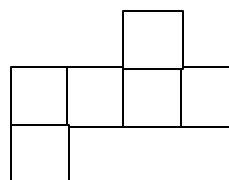
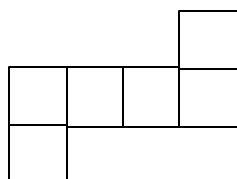
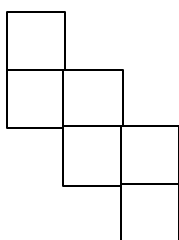
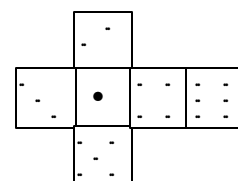
PROVA N° 1.- NÚMEROS EN CREU

Col·loqueu en la següent quadrícula els números de l'1 al 8 amb la condició de que cap número tinga al costat un consecutiu (ni anterior ni posterior) tant en horitzontal, en vertical o en diagonal.



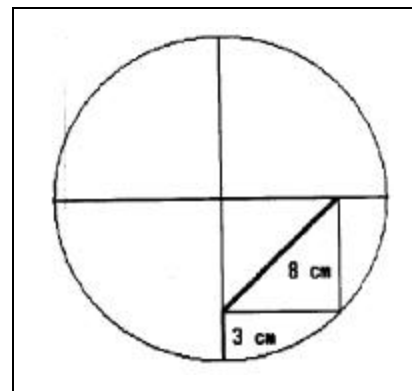
PROVA N° 2.-ELS DAUS

Utilitzant les següents figures, dissenya les cares de daus de manera que la suma de punts de dues cares oposades siga 7. Com per exemple:



PROVA N° 3.- EL RADI DEL CERCLE

Tenint en compte la figura, trobar el radi del cercle.



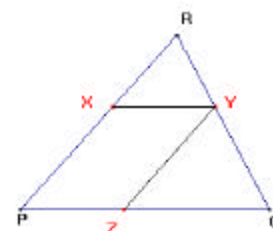
PROVA N° 4.- FRACCIOGRAMA

$\frac{1}{3}$	+		=	2
+		$\frac{3}{4}$		
$\frac{3}{4}$	x		=	
=		=		
	.	$\frac{4}{6}$	=	

Completeu les caselles en blanc

PROVA N° 5.- SEGMENTS

Si en la següent figura els costats mesuren $PR = 40$ mm., $RQ = 34$ mm. I $PQ = 36$ mm., i es pren $RX = 20$ mm., quin valor hi haurà de donar-li a RY per a que XY siga paral·lela a PQ , i quant mesurarà XY ?



PROVA N° 6.- EL VIATGE DE FI DE CURS

Al meu institut els estudiants estan organitzant el viatge de fi de curs, i per a recollir diners han decidit posar unes paradetes de castanyes. En total han comprat 100 quilograms de castanyes, i se les van a repartir en parts iguals per a vendre-les.

a.- Ompli la següent taula en la que es relacione el número d'alumnes que van al viatge amb el número de quilograms que hauria de vendre cadascun.

N° ALUMNES	5	8	12	17	22	27	31	34	37	40
N° QUILOGRAMS										

b.- Representa gràficament la relació anterior.



c.- Comprova que es verifica que el producte: n° d'alumnes que van al viatge pel n° de quilos que ha de vendre cadascun és constant. La quantitat a vendre i el n° d'alumnes són inversament proporcionals? _____

d.- Quant val la constant anterior? _____

e.- Quin és el significat d'aquesta constant en la gràfica? _____

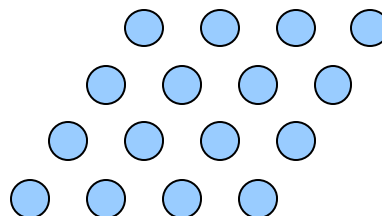
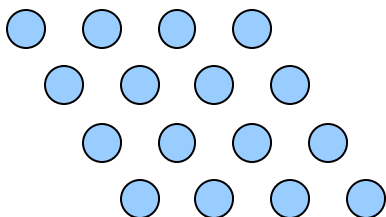
f.- Què passaria si no anara ningú a l'excursió? _____

g.- I si el número d'alumnes augmentara sense fi? _____

PROVA N° 7.- TRANSFORMACIÓ

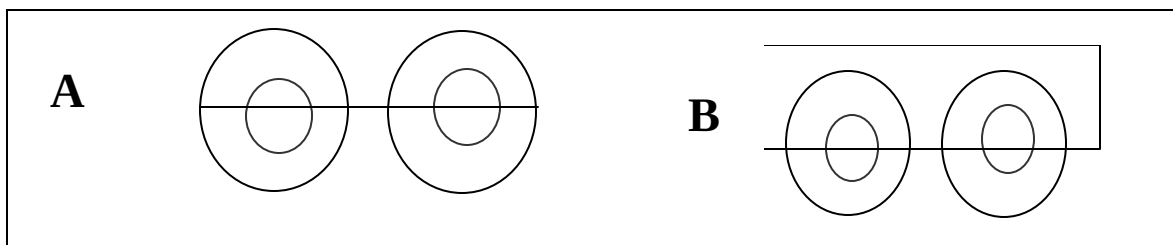
Quin és el mínim número de fitxes que cal moure per a transformar una figura en l'altra?

Indiqueu quines són eixes fixes.



PROVA N° 8.- SENSE ALÇAR EL LLAPIS

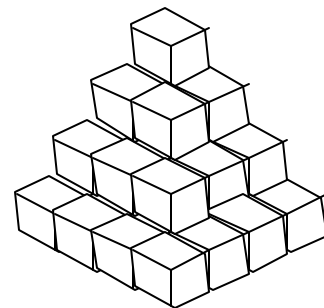
Cal trobar la manera de dibuixar cadascuna de les següents figures sense alçar el llapis del paper i sense repassar cap línia, o siga, sense passar dues voltes per la mateixa línia.



PROVA N° 9.- CUBS

Quants cubs componen la següent figura?

Quants no en veus?



PROVA N° 10.- L'ILLA MISTERIOSA

Un turista arriba a una illa en la que tots els seus habitants diuen la veritat els dilluns, dimecres, divendres i diumenges, mentre que els demés dies de la setmana diuen sempre mentides. El turista manté el següent diàleg amb un nadiu de l'illa:

Turista: Quin dia és hui?

Nadiu: Dissabte.

Turista: Quin dia serà demà?

Nadiu: Dimecres.

Quin dia de la setmana és realment?

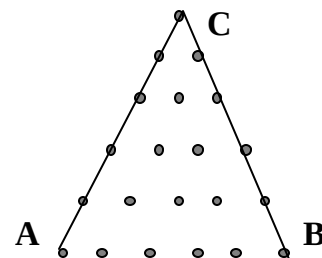
PROVA N° 11.- SERIE

Quin serà el següent número de la serie?

28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38,

PROVA N° 12.- TRIANGLES EQUILÀTERS

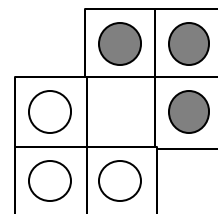
Quants triangles equilàters, que tinguin els seus vèrtex en els punts de la trama, hi ha dins del triangle ABC?



PROVA N° 13.- INTERCANVI

L'objectiu és intercanviar les fitxes blanques i les negres amb el mínim número de moviments. Les regles són:

- una fitxa pot moure's a la casella contigua buida.
- Una fitxa pot botar sobre una altra de diferent color verticalment o horitzontal per a caure en una casella buida.



PROVA N° 14.-DE L'1 AL 8

Col·loqueu en cada quadradet els números de l'1 al 8, amb la condició de que la diferència entre dos números veïns no serà mai menor que 4.

--	--	--	--	--	--	--	--

PROVA N° 15.- OMPLIR LA PISCINA

Per a omplir d'aigua una piscina, hi ha tres sortidors. El primer sortidor tarda 30 hores en omplir-la, el segon tarda 40 hores i el tercer tarda cinc dies. Si els tres sortidors es connecten junts, quant de temps tardarà la piscina en omplir-se?



PROBLEMES NIVELL B (4RT. ESO)

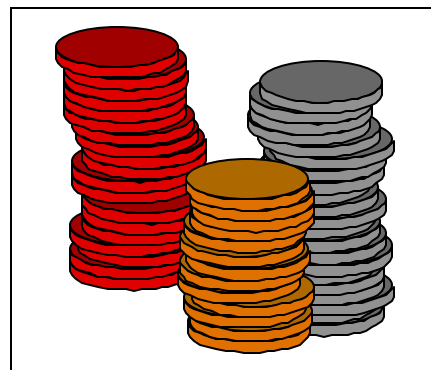
PROVA N° 1.- XIFRES

Determineu el número de xifres de $4^{16} \times 5^{25}$

PROVA N° 2.- ELS CENT COFRES

Cent cofres contenen el mateix número de monedes. Es pren del primer cofre una certa quantitat de monedes, i després:

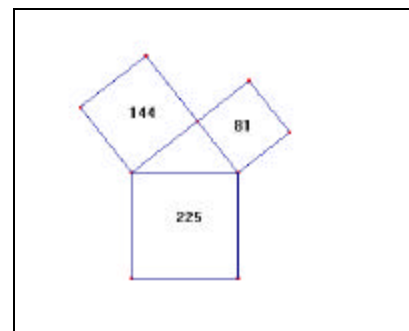
- del segon, es pren dues voltes el que es va prendre del primer;
- del tercer, es pren tres voltes el que es va prendre del primer;
- ...
- del que fa cent, es pren cent voltes el que es va prendre del primer.



En queda en total 14.950 monedes, de les quals una és la única que ens queda en l'últim cofre. Quantes monedes hi havia inicialment en cada cofre?

PROVA N° 3.- TRIANGLE

Un triangle està envoltat per tres quadrats, d'àrees 225, 81 i 144 cm^2 , respectivament. Quina és l'àrea del triangle?



PROVA N° 4.- DIVISIÓ

Sabem que el quocient de dos números enters és 13.28125. Trobeu eixos números sabent que un d'ells té dues xifres i l'altre és menor que 500.

PROVA N° 5.- CICLISTA

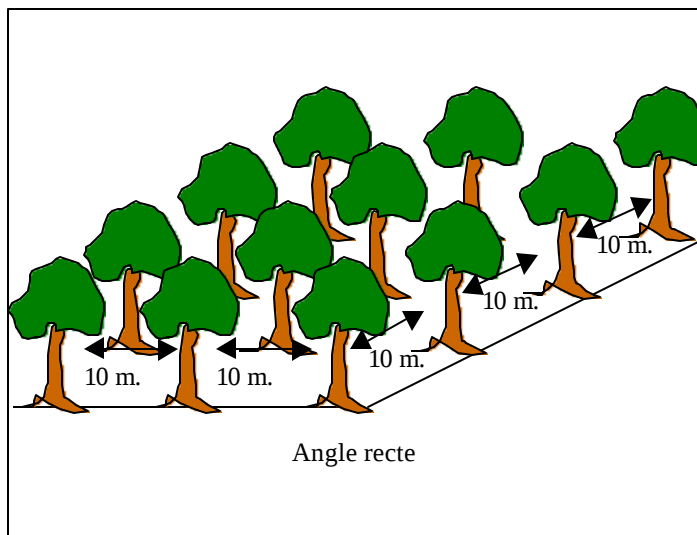
Un ciclista corre durant 2 hores. Inicia la seua carrera en un terreny pla, després efectua una ascensió d'una costera fins pujar a una muntanya, pega mitja volta i torna al seu punt de partida prenent la mateixa ruta. La seua velocitat es 24 Km/h. sobre el terreny pla, 15 Km/h. quan puja la muntanya i 60 Km/h. quan la baixa.

Calcula la distància total recorreguda.

PROVA N° 6.- EL RACÓ DEL BOSC

Un terreny boscós te la forma d'un triangle rectangle amb els costats que formen l'angle recte que mesuren 1 Km. i 0.4 Km. Els arbres estan plantats "tots els 10 metres", es a dir, que horitzontalment i vertical tots estan a 10 metres de l'arbre del costat, com indica el dibuix.

Quants arbres hi ha sobre el terreny, amb les voreres incloses?



PROVA N° 7.- PARKING

La taula de preus del estacionament de la Plaça Santa Clara en Castelló es:

Temps d'estacionament	Preu per hora De 7 a 14 hores en Euros	Preu en Euros per hora resta del dia
Primera hora o fracció	0	1.5
Segona hora o fracció	1	1.5
A partir de la tercera hora	4	1.5
Cost màxim per 24 hores	15	15

- Quant pagarà una persona que entra a les 7:25 del matí i roman en l'estacionament fins les 9:40? I si roman el mateix temps, però, entra a les 13 hores? I si entra a les 20:55 hores?
- Fes el gràfic per a un vehicle que entra a les 11 del matí i roman en l'estacionament durant 20 hores.
- Quina creeu que és la política de l'estacionament?

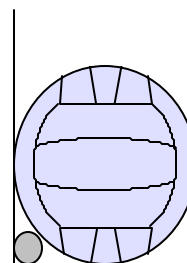
PROVA N° 8.- L'ENUNCIAT FALS

Determineu la veracitat o la falsedat dels 10 enunciats següents:

- Exactament un dels enunciats d'aquesta llista és fals.
- Exactament dos dels enunciats d'aquesta llista són falsos.
- Exactament tres dels enunciats d'aquesta llista són falsos.
- Exactament quatre dels enunciats d'aquesta llista són falsos.
- Exactament cinc dels enunciats d'aquesta llista són falsos.
- Exactament sis dels enunciats d'aquesta llista són falsos.
- Exactament set dels enunciats d'aquesta llista són falsos.
- Exactament vuit dels enunciats d'aquesta llista són falsos.
- Exactament nou dels enunciats d'aquesta llista són falsos.
- Exactament deu dels enunciats d'aquesta llista són falsos.

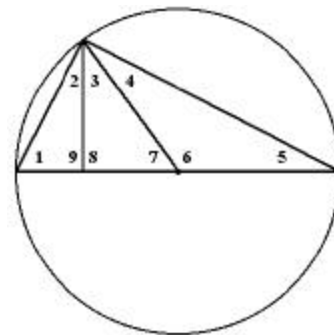
PROVA N° 9.- ESFERES

Un baló de 30 cm. De diàmetre està recolzat sobre la paret i sobre el sol. Podria passar una pilota de 5 cm. de diàmetre entre la paret i el sol sense tocar el baló?



PROVA N° 10.- ANGLES

Calcula el valor de tots els angles de la figura sabent que l'angle 1 val 70° .

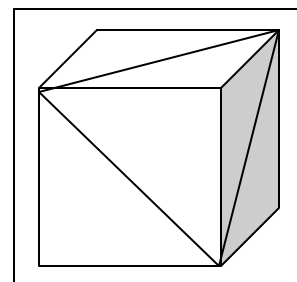


PROVA N° 11.- BASQUET

L'altura mitjana dels jugadors, que hi ha un cert moment en la pista d'un equip de bàsquet és de 197 cm. L'entrenador assenta a Mágico González (208 cm.) i treu a la pista a Miquel Llarguet (203 cm.) Quina és ara l'altura mitjana de l'equip que està en la pista?

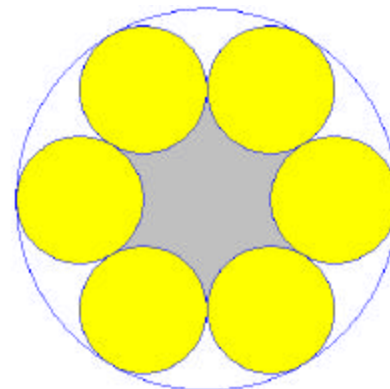
PROVA N° 12.- TALLEM EL CUB

Prenem un cub d'aresta 4 cm. Pels extrems de cada tres arestes que comencen en un vèrtex comú, dibuixem un pla, i tallem el cub per eixe pla. Si fem esta operació per als 8 vèrtex del cub, calcula el volum del sòlid obtingut.



PROVA N° 13.- CIRCUMFERÈNCIES

Si totes les circumferències dibuixades són tangents entre si, i el radi de cadascuna de les circumferències interiors és de 2 cm., quina és l'àrea de la figura ombrejada?



PROVA N° 14 GERMANS I GERMANES

"Tinc tants germans com germanes". Una germana de la persona que acaba de parlar diu: "Tinc dues voltes més germans que germanes". Quants germans i germanes són?

PROVA N° 15.- DEL ZOOLÒGIC

Resol la següent operació, sabent que cada lletra identifica a una única xifra:

$$(ZOO)^2 = TOPAZ$$

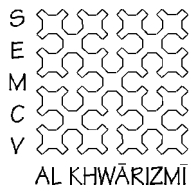
Z=

O=

T=

P=

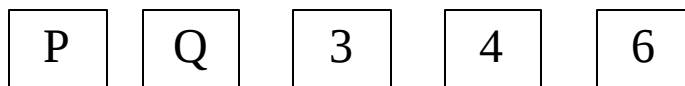
A=



X OLIMPIADA MATEMÀTICA - FASE AUTONÒMICA
MORAIRA, 29 i 30 DE MAIG DE 1999 - PROVA INDIVIDUAL

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

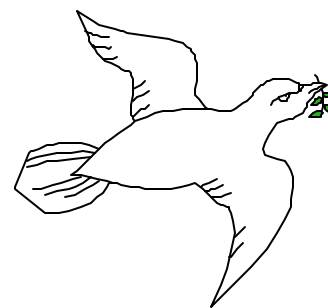
1.- Sobre una taula hi ha cinc cartes:



Cada carta té en una cara un número natural, i de l'altra una lletra. Joan afirma: "Qualsevol carta que tinga d'una banda una vocal, té un número parell de l'altra cara". Pere va demostrar que Joan mentia donant la volta sols a una carta. De quina de les cinc es tracta? Justifica raonadament la teua resposta.

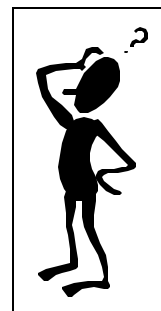
2.- Es dibuixen dos rectes secants a una circumferència, tallant-se ambdues rectes en un punt P, interior a l'esmentada circumferència. La primera talla a la circumferència en A i B, sent $AP = 4$ cm. i $BP = 6$ cm. La segona recta talla a la circumferència en els punts C i D, sent $CP = 3$ cm. Quant mesurarà DP?

3.- Els pardals de l'espècie Pupilicci emigren de la zona A a la zona B. La distància entre ambdues zones és de 1000 Km. Suposem que la zona A de partida correspon al Km. zero de la ruta i la zona B de destí al Km. 1000 de la ruta. Al principi i al final de la ruta es troben diverses fonts d'alimentació, però al llarg de la ruta, els pardals sols troben aliment en el Km. 400.



- a.- Obtén i representa gràficament la funció que descriu la distància del Km. X de la ruta a la font d'alimentació més propera.
- b.- En quin punt del recorregut s'arriba a la màxima distància a una font d'aliment?

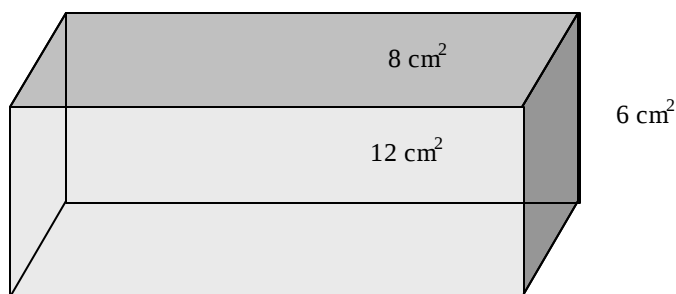
4.- Alex va pensar tres números. Si els agrupa de dos en dos i els suma, obté 38, 44 i 52. Quins són eixos números?





5.- Quan un professor porta corregits els sis primers exàmens d'una classe, la nota mitjana és de 8'4 punts. En corregir el setè, la nota mitjana va pujar a 8'5 punts. Quina qualificació va obtenir l'examen setè?

6.- Les àrees de tres cares adjacents d'un ortoedre són les que apareixen en la figura. Sabries calcular el seu volum?

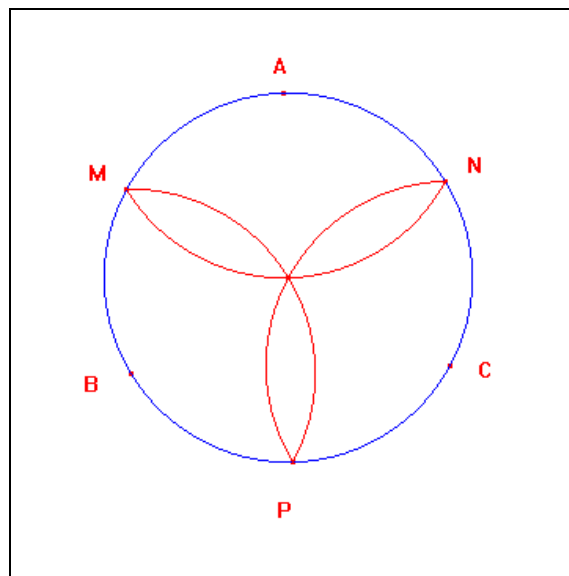


PROBLEMES NIVELL B (4RT. ESO)

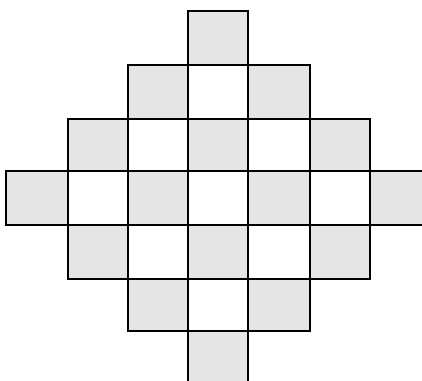
1.- Trobar un número de quatre xifres que verifiqui les següents condicions:

- La suma dels quadrats de les xifres de les centenes i de les unitats és igual a 53.
- La suma dels quadrats de les altres dues xifres és igual a 45.
- Si del número cercat restem el que s'obté en invertir les seues xifres, s'obté un múltiple de 99 comprés entre 1000 y 1200.

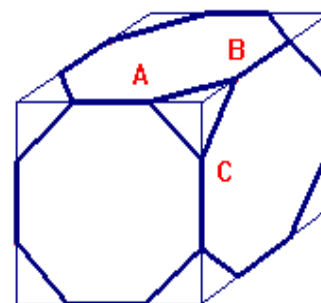
- 2.- Trobar l'àrea i el perímetre de la part ombrejada de la següent figura, sabent que el diàmetre mesura 20 cm i sent A, B i C els centres dels arcs de circumferència MN, MP i PN, respectivament.

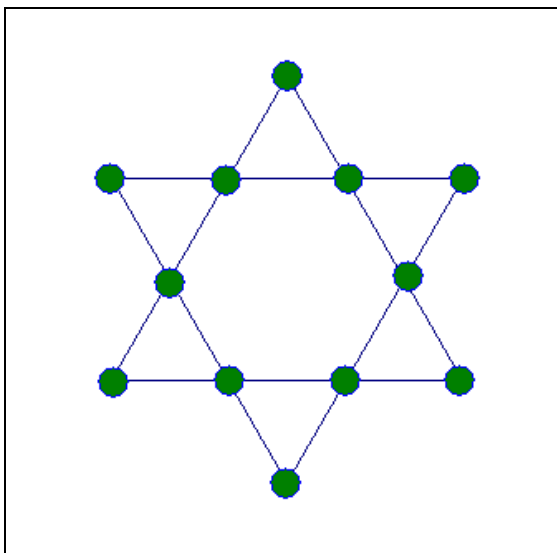


- 3.- La següent figura està formada per quadrats blancs i negres. Té 7 quadrats d'amplària. Si volem fer una figura similar amb 99 quadrats d'amplària, ¿quants quadrats tindrà en total?.



- 4.- En un cub d'1 metre d'aresta tallem les tres arestes que concorren en un vèrtex, de manera que la secció siga un triangle equilàter. Repetim l'operació en tots els vèrtex, de tal manera que el sòlid resultant tinga totes les seues arestes iguals. A quina distància del vèrtex cal tallar la aresta del cub per a obtenir aquest sòlid?. Quin és el perímetre del sòlid obtingut?.

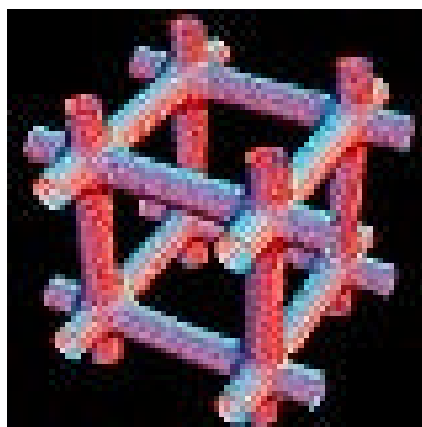


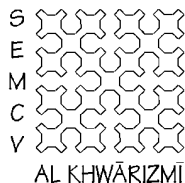


5.- Col·loca en cada cercle un número comprés entre 1 i 12, de forma que els sis costats de l'estrella sumen sempre la mateixa quantitat.

6.- Ana ha venut pomes en vàries cases. En cadascuna deixà la meitat de les que portava més mitja i conste que mai va partir pomes. No recorda en quantes cases estigué, però sap que va efectuar no menys de quatre vendes i que va començar la jornada amb menys de 100 pomes i al finalitzar la jornada les vengué totes.

- En quantes cases vengué pomes?.
- Quantes pomes tenia inicialment?.
- Quantes vengué en cada casa?.





X OLIMPIADA MATEMÀTICA - FASE AUTONÒMICA
MORAIRA, 29 i 30 DE MAIG DE 1999 - PROVA PER EQUIPS

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

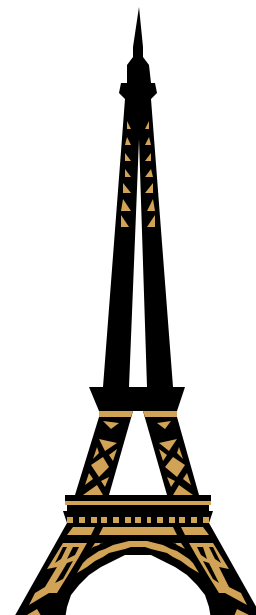
PROVA N° 1.- ELS ENUNCIATS FALSOS

Tenim ací tres enunciats falsos. Serieu capaços de descobrir quins són?

1. $2+2=4$
2. $2 \cdot 3 \times 6=17$
3. $3 \cdot 8/4=2$
4. $4 \cdot 13-6=5$
5. $5 \cdot 5+4=9$

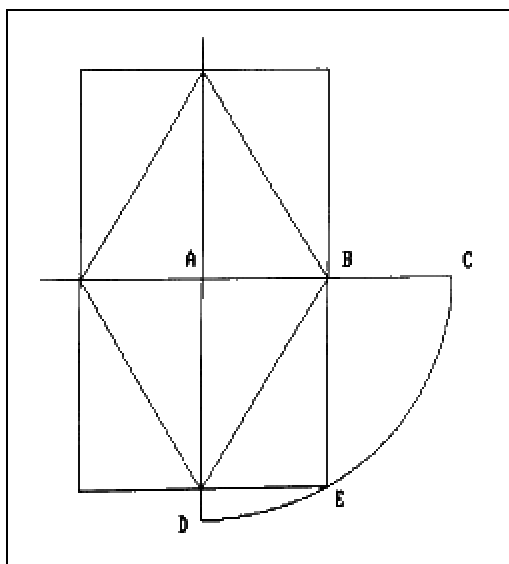
PROVA N° 2.- LA TORRE EIFFEL

La torre Eiffel té 320 metres d'alçada i pesa 7.000 tones. Si construïrem un model perfectament a escala, amb el mateix material i que tinguera la meitat de la seua alçada, quant pesaria?



PROVA N° 3.- EL COSTAT DEL ROMB

En una plaça circular de $R=9$ m. es vol construir un estanc de forma ròmbica, segons la figura.



Quant mesura el costat del romb?

PROVA N° 4.- ELS TATUADORS

Dos tatuadors i mig poden tatuar dos sirenes i mitja, en els braços de dos mariners i mig en dues hores i mitja. Quants tatuadors se necessitaran per a tatuar 24 sirenes, en els braços de 24 mariners en 24 hores?

PROVA N° 5.- CALENDARI

Per a assenyalar el dia es col·loquen els cubs de manera que les seues cares frontals donen la data. En cada cub, cadascuna de les cares porta un número del 0 al 9, distribuïts amb tant encert que sempre podem construir les dates 01, 02, 03, ..., 31 disposant-los adequadament.

Sabeu quins són els quatre dígitos no visibles en el cub de l'esquerra, i els tres ocults en el de la dreta?



PROVA N° 6.- ELS ATLETES

De quatre corredors d'atletisme se sap que C ha arribat immediatament darrere de B, i D ha arribat en mig de A i C. Podrieu calcular l'ordre d'arribada?

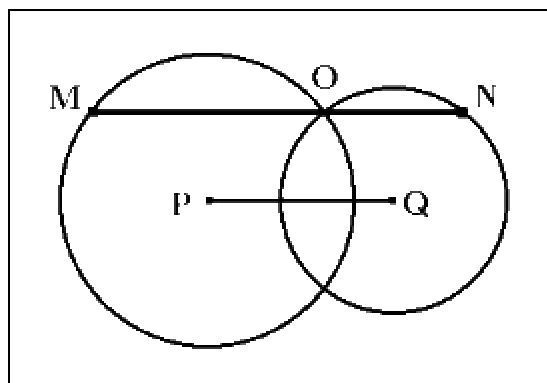
PROVA N° 7.- ELS NOUS

En un carrer hi ha 100 edificis. Es crida a un fabricant de números per a que pose números a totes les cases de l'un al cent; aquest tindrà que encarregar els números per a fer el treball. Quants nous necessitarà?



PROVA N° 8.- CIRCUMFERÈNCIES

Dos circumferències secants tenen per centres P i Q respectivament. El segment PQ mesura 3 centímetres. Per un dels punts (O) on es tallen les circumferències tracem una recta paral·lela al segment PQ. Siguen M i N els punts on talla l'esmentada recta a les circumferències. Quant mesura MN?



PROVA N° 9.- EL TRIANGLE D'ÀREA MÀXIMA

Els costats iguals d'un triangle isòsceles mesuren 4 cm. Quina longitud haurà de tenir el tercer costat per a aconseguir que el triangle tinga la màxima àrea possible?

PROVA N° 10.- LA NOTA MITJANA

La nota mitjana aconseguida en una classe de 20 alumnes ha segut de 6. Vuit alumnes han suspens amb un 3 i la resta superà el 5. Quina és la nota mitjana dels alumnes aprovats?

PROVA N° 11.- QUADRAT MÀGIC

Completa les caselles que falten per a que resulte màgic el següent quadrat:

1	20		23	
24		2		10
17		25	14	
15	4		7	21
	22	11		19

PROVA N° 12.- LES MONEDES

Tenim 44 monedes i 10 butxaques, i volem repartir-les en elles de manera que en cadascuna de les butxaques tinguem un número diferent de monedes. Com ho faries?



PROVA N° 13.- PARELLS I SENARS

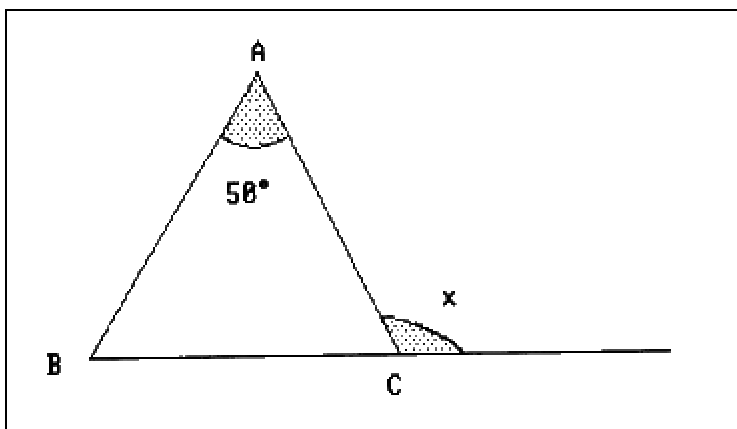
La suma de sis números és parell, el producte dels quatre primers és senar, i l'últim número és parell. El número cinquè, és parell o senar?

PROVA N° 14.- EL TIMBRE DEL TELÈFON

El timbre del telèfon ha sonat tres voltes. Des del inici del primer timbre fins que ha deixat de sonar han transcorregut 14 segons. Més tard, en altra ocasió, l'hem deixat sonar cinc voltes, i el temps transcorregut ha sigut de 24 segons. Quant dura una pausa entre dos timbres consecutius?



PROVA N° 15.- MESUREU L'ANGLE



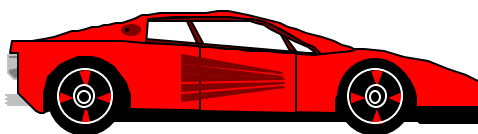
En el triangle isòsceles ABC l'angle A mesura 50° .

Quina és la mesura de l'angle x ?

PROBLEMES NIVELL B (4RT. ESO)

PROVA N° 1.- EL TRANSPORT PER A LES VACANCES

Sis amics volen passar les seues vacances junts i decideixen, cada dos, utilitzar diferents medis de transport; sabem que Alejandro no utilitza el cotxe ja que aquest acompanya a Benito que no va en avió. Andrés viatja en avió. Si Carles no va acompanyat de Dario ni fa ús de l'avió, podríeu dir en quin medi de transport arriba al seu destí Tomás?



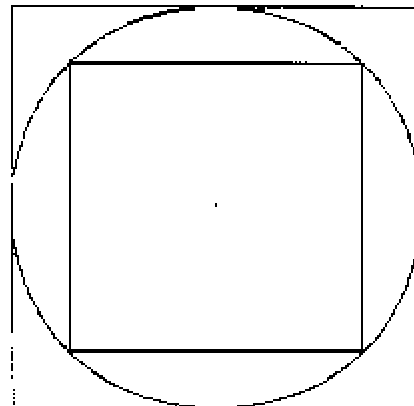
PROVA N° 2.- QUIN PRODUCTE!

Trobeu dos números de tres dígit tal que el seu producte siga 555555.

PROVA N° 3.- ELS DOS QUADRATS

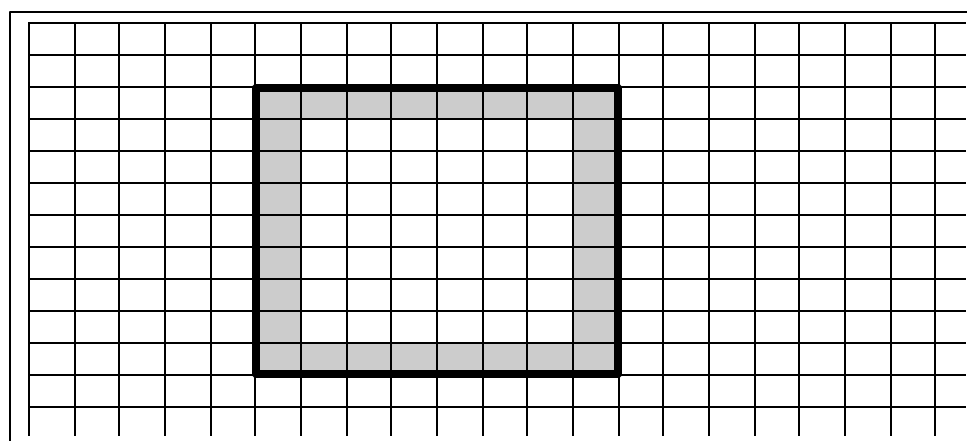
A una circumferència poden inscriure's i circumscriure's quadrats com mostra la figura adjunta.

Sabent que l'àrea del quadrat inscrit és de quatre unitats de superfície, quina àrea té el quadrat major? Justifiqueu la resposta.



PROVA N° 4.- RECTANGLE OMBREJAT

Es dibuixa un rectangle en paper quadriculat i s'ombregen les caselles del seu contorn per l'interior. El número de caselles ombrejades serà menor, igual o major que el número de caselles blanques de l'interior. Serà possible dibuixar un rectangle de proporcions tal que la vora (d'una casella d'amplària) continga un número igual de quadres que el rectangle blanc interior? De ser així, trobar totes les solucions.



PROVA N° 5.- ANY 1999

Trobeu dos enters positius m i n tal que $1999 + n^2 = m^2$

PROVA N° 6.- LA MOSCA CAPRITXOSA

Col·loquem sobre la taula 25 monedes iguals en la següent posició:

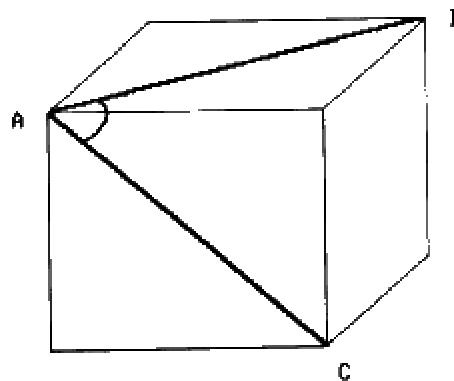
```

O O O O O
O O O O O
O O O O O
O O O O O
O O O O O
    
```

Una mosca ve volant i es posa sobre una d'elles (la indicada). Se li ocorre fer un passeig anant per les 25 monedes, però, passant d'una moneda a altra horitzontalment i vertical i sense repetir moneda. Ho podrà fer? Quin itinerari seria el adequat per a cada moneda en la que es puga posar?

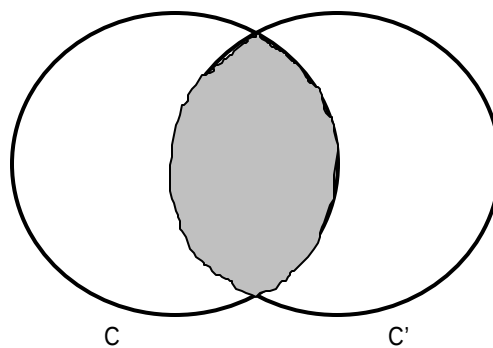
PROVA N° 7.- DIAGONALS DEL CUB

Quants graus mesura l'angle que formen les dues diagonals de les cares del cub?



PROVA N° 8.- CERCLES SECANTS

Els cercles C i C' tenen el mateix radi R, i el centre d'un pertany a la circumferència de l'altre. Quin és el perímetre de la superfície ombrejada?



PROVA N° 9.- LES ALTURES

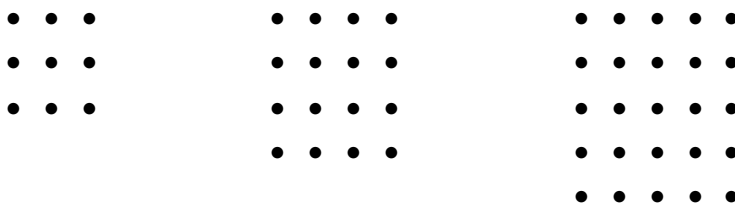
S'ha mesurat l'altura de 20 estudiant de 4rt. de Secundària obtenint les següents dades:

1.82 1.72 1.75 1.62 1.67 1.69 1.66 1.91 1.83 1.73
1.80 1.77 1.68 1.76 1.69 1.75 1.70 1.74 1.68 1.78

Elabora un gràfic que representa aquestes dades.

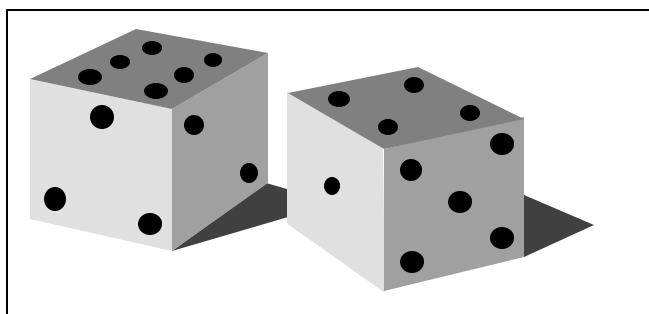
PROVA N° 10.- SEGMENTS EN UNA TRAMA

En una trama 3 X 3 es poden traçar segments de vàries longituds distintes, amb els extrems en els punts de la trama. Troba totes les longituds possibles.



PROVA N° 11.- EL DAU TRUCAT

En un dau no equilibrat, la probabilitat d'obtenir un número quan es llança el dau és proporcional a eixe número (per exemple, 4 té el doble de probabilitat de eixir que el dos). Trobar la probabilitat de:



- a.- Treure número par.
- b.- Treure un número primer.
- c.- Treure un número menor que tres.

PROVA N° 12.- LA XIFRA DE LES UNITATS

Quina és la xifra de les unitats del número

$$[(874597)^5 - (365645)^4] \cdot (8931)^7$$

PROVA N° 13.- DEL 0 AL 9

Col·loqueu un dígit en cada casella de manera que el número de la primera casella indique la quantitat de zeros del total de caselles, la de la segona la quantitat de uns, la de la tercera la quantitat de dosos,..., la de la dècima la quantitat de nous.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Nota: El número que hi ha posat en cada casella únicament serveix per a indicar la xifra que estem comptant, però que no intervindrà en el recompte.

PROVA N° 14.- ORDENEU PARAULES

Es formen totes les paraules de cinc lletres que usen les cinc lletres de la paraula OPTAR (per exemple, OATRP, PROTA, POTRA, etc.) i s'escriuen en ordre alfabètic. Quina és la paraula que ocupa el lloc n° 116?

PROVA N° 15.- QUADRATS

Amb nou quadrats de costats 1 cm., 4cm., 7 cm., 8 cm., 9 cm., 10 cm., 14 cm., 15 cm., i 18 cm., construïu un rectangle, de manera que els quadrats no se solapen ni hi haja buits entre ells.



WORLD MATHEMATICAL YEAR 2000

Launched by the International Mathematical Union (IMU) supported by Unesco

On May, 6th, 1992, in Rio de Janeiro (Brazil), the International Mathematical Union declared that the **Year 2000** will be the **World Mathematical Year**

The Declaration sets three aims:

- The great challenges of 21st Century
- Mathematics, a key for Development
- The image of mathematics

Plans of WMY 2000

Many Mathematical Institutions are already involved but the event has to be really international!

All plans in the spirit of the aims of WMY 2000 are welcome all around the world

Information and contacts:

IMU Institute for Advanced Study
Cidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
Instituto de Física de São Carlos
Instituto de Física de São Carlos

ASK your National Mathematical Society!

JOIN the Committees for WMY 2000!

DISTRIBUTE the Newsletter!

IMU Committee for the Year 2000
Mônica CHALEVAL MATHIEL
monica@mat.ufsc.br

Screen
http://www.gutenberg.org
http://www.2000-math.org

° SOLUCIONS

**X OLIMPIADA MATEMÀTICA -PROVINCIA DE VALÈNCIA
FASE COMARCAL - 8 DE MAIG DE 1999**
PROVA INDIVIDUAL - NIVELL A (2on. E.S.O.)

1.- Que sume 1 hi ha un, per que l'únic cas per a que ens done 1 és que sumem $1 + 0 : 101$.
Que sume 2 hi ha dos casos: $1 + 1 (112)$ i $2 + 0 (202)$
Que sume tres hi ha tres casos: $1 + 2 (123)$, $2 + 1 (213)$ i $3 + 0 (303)$.
Així successivament fins el nou que tindrà nou casos. Per tant, en total hi haurà:
 $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$. La solució és que hi ha 45 números.

2.- El problema no té solució. Si recorre fins a B 5 Km. a una velocitat de 20 Km./h, aleshores ha tardat quinze minuts en arribar. Si vol que la velocitat mitjana de tot el recorregut siga de 40 Km./h. aleshores hauria de tardar quinze minuts en arribar de A fins a C, la qual cosa no va a ser possible.

3.- Anomenem A al número que posarem en la casella 2 i B al de la casella 3. Si els números de les caselles 1, 2 i 3 sumen el mateix que els de les caselles 2, 3 i 4, aleshores en la casella 1 cal escriure el 17.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
17	A	B	17				20					

Els números de les caselles 2, 3 i 4 sumen el mateix que els de les caselles 3, 4 i 5; aleshores en la casella 5 ha de situar-se el mateix número que en la 2: A. Pel mateix raonament, en la casella 6 s'escriu B i en la 7 s'escriu 17.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
17	A	B	17	A	B	17	20					

$A+B+17=B+17+20$, per ser números de 3 caselles consecutives. Aleshores $A=20$. Si completem la taula:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
17	20	B	17	20	B	17	20	B	17	20	B	17

La suma total és $5 \cdot 17 + 4 \cdot 20 + 4B = 217$. $B = 13$. La taula final és:

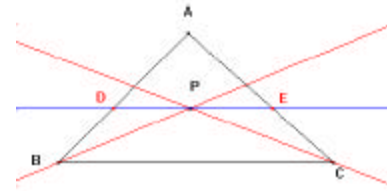
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
17	20	13	17	20	13	17	20	13	17	20	13	17

4.- Els angles $\widehat{PBC}$ i $\widehat{BPD}$ són iguals per ser alterns interns entre paral·leles. Aleshores, el triangle BPD és isòsceles i $BD = PD$.

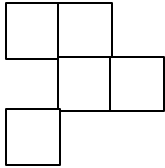
Els angles $\hat{BCP}$ i $\hat{CPE}$ són iguals per ser alterns interns entre paral·leles. Aleshores, el triangle CPE és isòsceles i $CE = PE$.

$$DE = DP + PE = 5.3 + 7.8 = 13.1$$

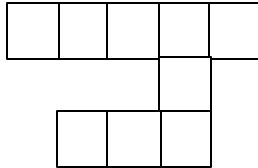
La solució és que DE mesura 13.1 cm.



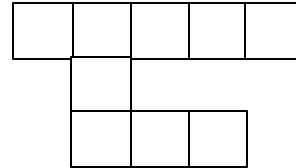
5.-



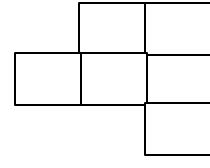
FRONT



ESQUERRE



DRETA



DARRERE

6.- Nomenem Z, E i C als quilos de carlotes que mengen en un dia la zebra, l'elefant i el conill respectivament. Aleshores,

$$365 C = 2 E, \text{ o siga, } C = \frac{2}{365} E$$

$$E = 5 Z, \text{ o siga, } Z = \frac{1}{5} E \quad \text{A més a més, } E + C + Z = 55.$$

$$\text{Si substituïm Z i C: } E + \frac{2}{365} E + \frac{1}{5} E = 55 \Rightarrow E \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{2}{365} \right) = 55$$

$$\Rightarrow E \frac{440}{365} = 55 \Rightarrow E = \frac{55 \cdot 365}{440} = 45.625$$

$$C = \frac{2}{365} \cdot 45.625 = 0.25 \quad Z = \frac{1}{5} \cdot 45.625 = 9.125$$

Aleshores, cada dia l'elefant menja 45.625 Kg. La zebra menja 9.125 Kg. I el conill menja 0.25 Kg.

PROVA INDIVIDUAL - NIVELL B (4rt. E.S.O.)

1.- Siga d, v i c les quantitats de bitllets de 10, 20 i 50 que te Mireia, respectivament. Aleshores,

$$\begin{aligned} d+v+c &= 20 \\ 10d+20v+50c &= 500 \end{aligned}$$

Sabem que $c < 10$, perquè $50 \cdot 10 = 500$ i Mireia te bitllets dels tres tipus. També sabem que $c \geq 2$ perquè Mireia te bitllets dels tres tipus i més bitllets de 50 que de 10.

Si $c=2$, els altres 18 bitllets han de sumar 400, però $\frac{400}{18} > 20$ aleshores aquest cas és impossible.

Si $c=3$, passa el mateix, perquè els altres 17 bitllets han de sumar 350 i $\frac{350}{17} > 20$.

Si $c=4$, d pot ser 1, 2 o 3 i v serà respectivament 15, 14 o 13.

$$10 + 15 \cdot 20 + 4 \cdot 50 = 510 \neq 500$$

$$2 \cdot 10 + 14 \cdot 20 + 4 \cdot 50 = 500$$

$$3 \cdot 10 + 13 \cdot 20 + 4 \cdot 50 = 490 \neq 500$$

En aquest cas obtenim la solució $d=2$, $v=14$ i $c=4$.

Si $c=5$, d pot ser com a molt 4. Els restants 11 bitllets han de sumar com a molt 210, però

$$\frac{210}{11} < 20. \text{ El cas és impossible.}$$

Si $c=6$, d pot ser com a molt 5. Els restants 9 bitllets han de sumar com a molt 150, però

$$\frac{150}{9} < 20.$$

Si $c=7$, d pot ser com a molt 6, i els restants 7 bitllets sumaran com a molt 90. Però $\frac{90}{7} < 20$, i per tant el cas és impossible.

Si $c=8$, els restants 12 bitllets han de sumar 100, però $\frac{100}{12} < 10$ i el cas també és impossible.

Si $c=9$, els restants 11 bitllets han de sumar 50, però $\frac{50}{11} < 10$, i el cas és impossible.

Aleshores, Mireia te **2 bitllets de 10 €, 14 de 20€ i 4 de 50€.**

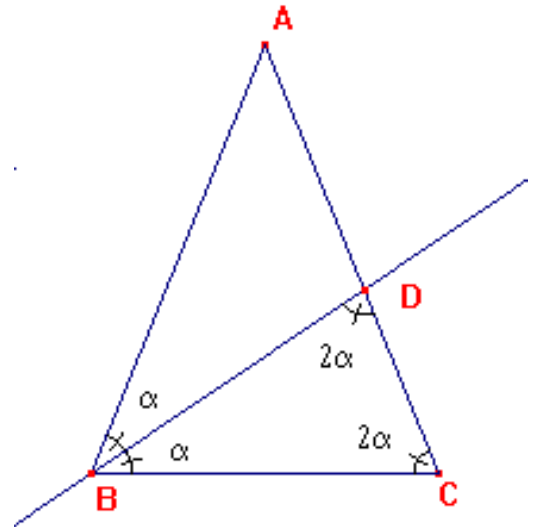
2.- Siga $\alpha = \hat{DBC}$ aleshores $\hat{ABC} = 2\alpha$ perquè BD és bisectriu de $\hat{ABC}$.

$\hat{BCA} = 2\alpha$ perquè ABC és isòsceles.

$\hat{BDC} = 2\alpha$ perquè BDC és isòsceles.

La suma dels angles interiors del triangle BDC és $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha$, i per tant $5\alpha = 180^\circ$ i $\alpha = 36^\circ$

El triangle BDC té dos angles iguals a 2α , per tant el tercer angle ha de ser α . $\hat{A} = \alpha = 36^\circ$.



3.- Si designem per A, B i C les tres cares del cub visibles, aleshores el número de cubs menuts negres que hi ha són els següents:

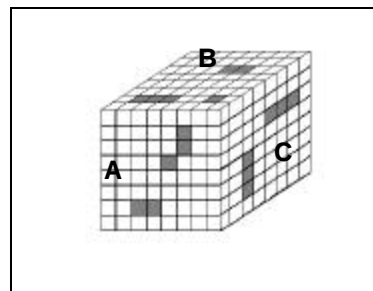
- Si contem el número de cubs que hi ha en cada fila de cada cara, resulta:

Cara A. $5 \times 8 = 40$ Cara B. $6 \times 8 = 48$ Cara C. $6 \times 8 = 48$ Total: 136 cubs.

- A continuació caldrà restar les interseccions de dos files, pues són cubs que s'han comptat dues voltes:

$A \cap B = 5$ cubs $A \cap C = 5$ cubs $B \cap C = 2$ cubs

Total: 12 cubs



- A continuació caldrà tenir en compte que les dobles interseccions s'han restat dues voltes, pel que caldrà sumar els cubs corresponents:

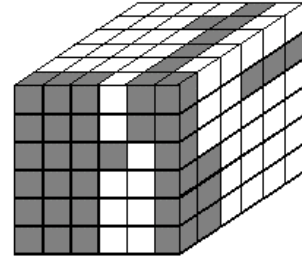
$$A \cap B \cap C = 1 \text{ cub}$$

En definitiva, en el cub gran hi ha $136 - 12 + 1 = 125$ cubs menuts de color negre.

Aleshores, el número de cubs menuts de color blanc serà:

$$8^3 - 125 = 512 - 125 = 387 \text{ cubs.}$$

Si llevem una capa de cada cara del cub gran, ens quedarà:



4.-

$$a + b + c = x$$

$$c + d + e = x$$

$$e + f + g = x$$

$$g + h + a = x$$

Sumem i ens queda:

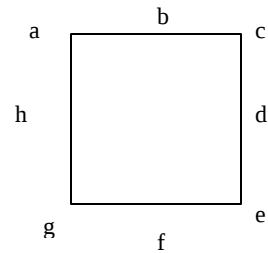
$$2(a+c+e+g)+b+d+f+h=4x$$

Per altra banda, $a+b+c+d+e+f+g+h$ és la suma, en algun ordre, dels números de l'1 al 8, i per tant, és igual a 36. Aleshores

$$a+c+e+g+a+c+e+g+b+d+f+h=4x$$

$a+c+e+g+36=4x$ Com $a+c+e+g$ és la suma de quatre números entre 1 i 8, aleshores resulta que: $1+2+3+4 \leq a+c+e+g \leq 5+6+7+8$

O siga, $10 \leq a+c+e+g \leq 26$ i per tant, $10 \leq 4x-36 \leq 26$.



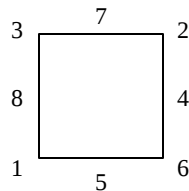
Com $4x-36$ és múltiple de 4, pot prendre els valors 12, 16, 20 o 24. Els possibles valors d' x són, respectivament, 12, 13, 14 o 15. Observem, a més a més, que

$$a+b+c+d+e+f+g+h=x+d+x+h=2x+d+h \quad \text{i} \quad a+b+c+d+e+f+g+h=b+x+f+x=2x+b+f$$

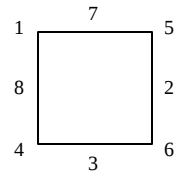
de manera que $b+f=d+h$

Algunes maneres d'obtenir numeracions com les que demana el problema (no són les úniques possibles):

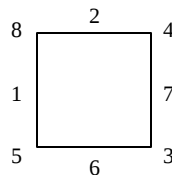
Per a $x=12$,
i $a+c+e+g=12$
 $b+d+f+h=24$



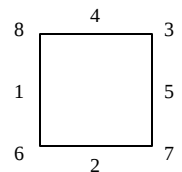
Per a $x=13$,
i $a+c+e+g=16$
 $b+d+f+h=20$



Per a $x=14$,
i $a+c+e+g=20$
 $b+d+f+h=16$



Per a $x=15$,
i $a+c+e+g=24$
 $b+d+f+h=12$



5.- Si escrivim tots els números del 0 al 999 usant 3 xifres completant amb zeros a l'esquerra als d'una i dues xifres, hem escrit en total 10^3 números, o siga, $3 \cdot 10^3$ dígit. En aquest procés s'utilitza la mateixa quantitat de vegades cada dígit, pel que cada dígit apareixerà $3 \cdot 10^3 / 10 = 3 \cdot 10^2$ voltes. Si sumem tots els dígit escrits obtenim:
 $3 \cdot 10^2 \cdot 0 + 3 \cdot 10^2 \cdot 1 + 3 \cdot 10^2 \cdot 2 + 3 \cdot 10^2 \cdot 3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 4 + 3 \cdot 10^2 \cdot 5 + 3 \cdot 10^2 \cdot 6 + 3 \cdot 10^2 \cdot 7 + 3 \cdot 10^2 \cdot 8 + 3 \cdot 10^2 \cdot 9 = 3 \cdot 10^2 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 3 \cdot 10^2 \cdot 45 = 13500$

Aquesta suma coincideix amb la suma dels dígit del número que resulta d'escriure els enters de l'1 al 999 de manera consecutiva. Aleshores la suma de les xifres d'N és $13500 + 1 = 13501$.

6.-

Dia	Va fer	Li falta
Dilluns	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$
Dimarts	$\frac{1}{3} \frac{n}{2} = \frac{n}{6}$	$\frac{n}{2} - \frac{n}{6} = \frac{n}{3}$
Dimecres	$\frac{1}{4} \frac{n}{3} = \frac{n}{12}$	$\frac{n}{3} - \frac{n}{12} = \frac{n}{4}$
Dijous	$\frac{1}{5} \frac{n}{4} = \frac{n}{20}$	$\frac{n}{4} - \frac{n}{20} = \frac{n}{5}$
Divendres	$V < 15$	0

Aleshores, $n = \frac{n}{2} + \frac{n}{6} + \frac{n}{12} + \frac{n}{20} + V$ $n = \frac{48n}{60} + V$ i per tant $V = \frac{1}{5}n$

Com tots els dies va fer una quantitat entera de pàgines, n ha de ser múltiple de 6, 12 i de 20. Per tant, n és múltiple de $\text{mcm}(6, 12, 20) = 60$.

Si $n = 60^a$, aleshores $V = 12^a$

Però com sabem que $V < 15$, aleshores $a = 1$. El treball tenia 60 pàgines, i el divendres va fer 12.

PROVA PER EQUIPS - NIVELL A (2on. E.S.O.)

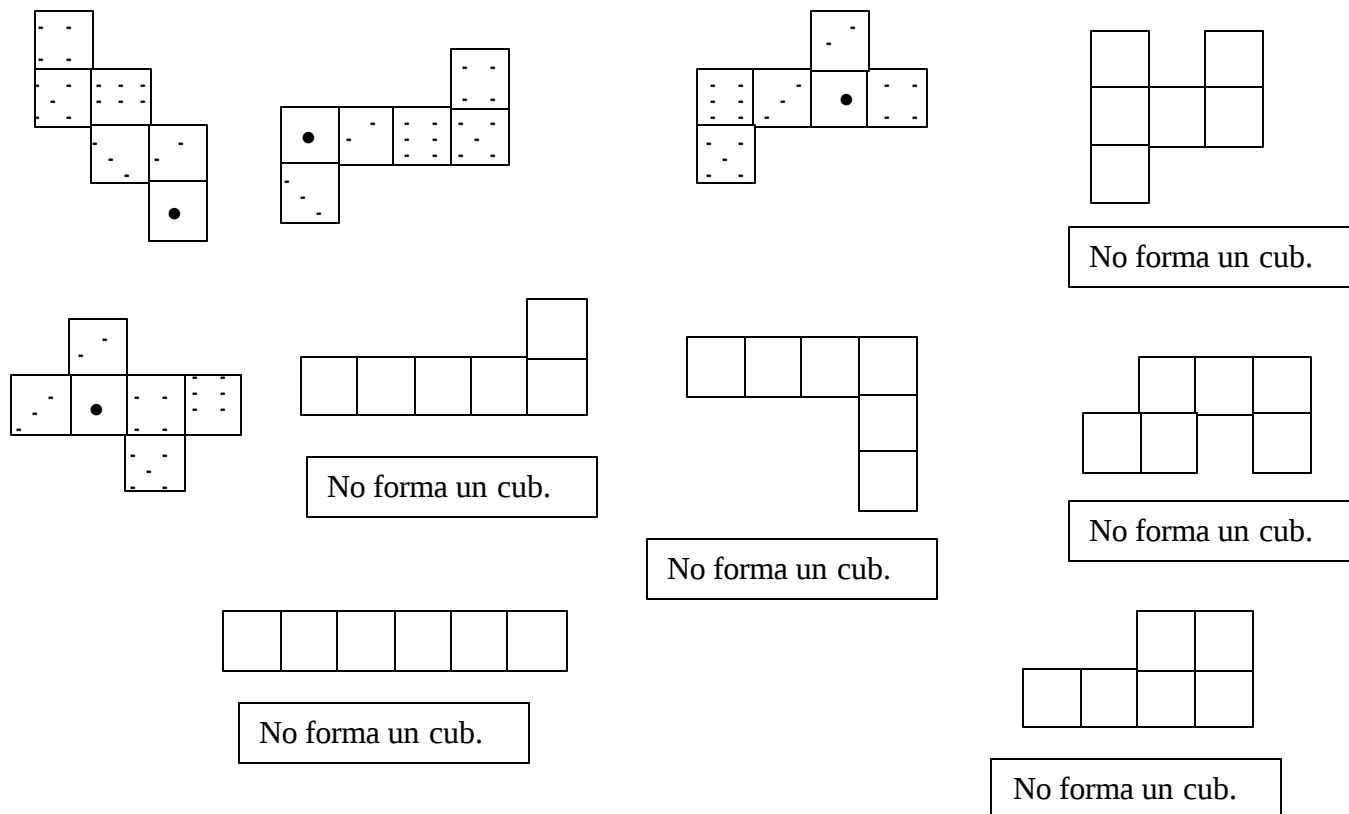
PROVA Nº 1.- NÚMEROS EN CREU

Solució: Ací posem dues possibles solucions:

	7	
4	1	3
6	8	5
	2	

	2	
5	8	6
3	1	4
	7	

PROVA N° 2.- ELS DAUS
Una possible solució:



PROVA N° 3.- EL RADI DEL CERCLE
Solució: El radi és de 8 cm.

PROVA N° 4.- FRACCIOGRAMA
Solució:

$\frac{1}{3}$	+	$\frac{5}{3}$	=	2
+		—		
$\frac{3}{4}$	x	1	=	$\frac{3}{4}$
=		=		
$\frac{13}{12}$	,	$\frac{4}{6}$	=	$\frac{78}{48} = \frac{13}{8}$

PROVA Nº 5.- SEGMENTS

 Solució: $XY = 18 \text{ cm.}$ i $RY = 18 \text{ cm.}$

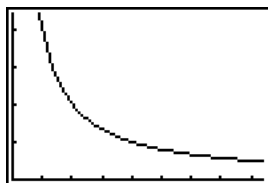
PROVA Nº 6.- EL VIATGE DE FI DE CURS

Solució:

a.-

Nº ALUMNES	5	8	12	17	22	27	31	34	37	40
Nº KILOS	20	12.5	8.33	5.88	4.55	3.70	3.23	2.94	2.70	2.5

b.-

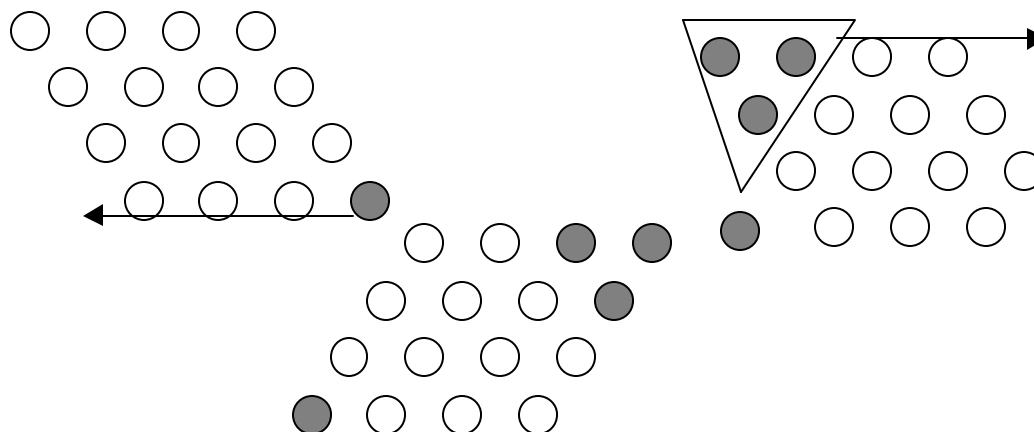


c.- Si

d.- 100.

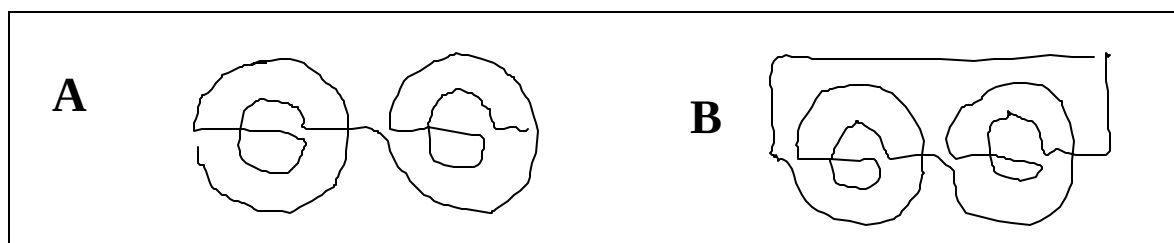
PROVA Nº 7.- TRANSFORMACIÓ

Solució: El mínim número de fitxes és 4.



PROVA Nº 8.- SENSE ALÇAR EL LLAPIS

Solució: Es mostra una possible solució de cada dibuix proposat.



PROVA Nº 9.- CUBS

 Solució: En total hi ha $1+4+9+16= 30$ cubs.

 No es veuen $1+4+9=14$ cubs.

PROVA N° 10.- L'ILLA MISTERIOSA

Solució:

Dilluns Dimarts Dimecres Dijous Divendres Dissabte Diumenge

Ha de ser Dimarts, Dijous o Dissabte, perquè el nadiu diu mentida. No pot ser Dissabte, perquè si no no diria mentida. Per la mateixa raó no pot ser Dimarts, perquè si no no diria mentida. Aleshores, sols queda la possibilitat de que siga **Dijous**.

PROVA N° 11.- SERIE

28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38,

Solució: El següent número és el 39: és el següent número i no és primer.

PROVA N° 12.- TRIANGLES EQUILÀTERS

Solució:

De costat 1: $1+3+5+7+9=25$ De costat 2: $1+2+3+4=10$ De costat 3: $1+2+3=6$ De costat 4: $1+2=3$

De costat 5: 1

Total: $25+10+6+3+1=45$ Triangles.

PROVA N° 13.- INTERCANVI

Solució: 15 moviments

PROVA N° 14.- DE L'1 AL 8

Solució:

4	8	3	7	2	6	1	5
---	---	---	---	---	---	---	---

PROVA N° 15.- OMPLIR LA PISCINA

Solució: 15 hores.

PROVA PER EQUIPS - NIVELL B (4rt. E.S.O.)

PROVA N° 1.- XIFRES

Solució: El resultat del producte tindrà 27 xifres, per què:

$$4^{16} \times 5^{25} = (2 \cdot 2)^{16} \cdot 5^{16} \cdot 5^9 = 2^{16} \cdot 2^{16} \cdot 5^{16} \cdot 5^9 = 10^{16} \cdot 2^9 \cdot 2^7 \cdot 5^9 = 10^{16} \cdot 10^9 \cdot 2^7 = 10^{25} \cdot 2^7 = 64 \cdot 10^{25}.$$

PROVA N° 2.- ELS CENT COFRES

Solució: Anomenem T al total de monedes i C a la quantitat de monedes que hi ha en cada cofre. Evidentment,

$$T = 100 \cdot C$$

Si X és el número de monedes que llevem del primer cofre, resulta que $X + 2X + 3X + \dots + 100X$ és el número de monedes que hem retirat en total. Aleshores,
 $T - X(1+2+3+4+\dots+100) = 14950$

I a més a més, sabem que $C - 100X = 1$, per tant, $C = 100X + 1$

Aleshores,
$$\begin{aligned} T &= 14950 + 5050X \\ T &= 100(100X + 1) \end{aligned}$$

$10000X + 100 = 14950 + 5050X$. D'ací traurem que $X=3$

Per tant, $C = 301$ monedes.

PROVA N° 3.- TRIANGLE

Solució: No cal calcular res, ja que les dimensions del triangle seran 12 i 9 per als catets i 15 per a la hipotenusa, per ser el triangle rectangle. Aleshores, l'àrea buscada serà: $(12 \cdot 9)/2 = 54 \text{ cm.}^2$

PROVA N° 4.- DIVISIÓ

Solució: El números buscats són: 425 i 32.

PROVA N° 5.- CICLISTA

Solució: Si X = distància total recorreguda
 Y = distància de la costera

Com el temps que es tarda en fer un recorregut és $t = \frac{e}{v}$ aleshores, sumem els temps emprats en cada tram, i ens queda:

$$\frac{x-y}{24} + \frac{y}{15} + \frac{y}{60} + \frac{x-y}{24} = 2 \Rightarrow \frac{x-y}{12} + \frac{5y}{60} = 2 \Rightarrow \frac{x-y}{12} + \frac{y}{12} = 2 \Rightarrow$$

$$X = 24 \text{ Km.}$$

PROVA N° 6.- EL RACÓ DEL BOSC

Solució: Hi ha 2081 arbres. Cal tenir en compte que si situem la base del triangle rectangle en l'eix horitzontal de un sistema de coordenades, de manera que la hipotenusa tinga un extrem en el seu origen, aquest costat estarà situat sobre la recta $Y=0.4X$. Cal contar columna per columna, començant en el punt (0,0), quants arbres estan per sota de la recta, obtenint la següent successió: 1,1,1,2,2,3,3,3,3,4,4,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,10,10,...39,39,39,40,40,41. La seua suma ens dona 2081.

PROVA N° 7.- PARKING

Solució:

a.-5 Euros 4.5 Euros 4.5 Euros

b.- Mirar cada cas particular.

c.- Afavorir l'estacionament de primera hora que dure poc de temps.

PROVA N° 8.- L'ENUNCIAT FALS

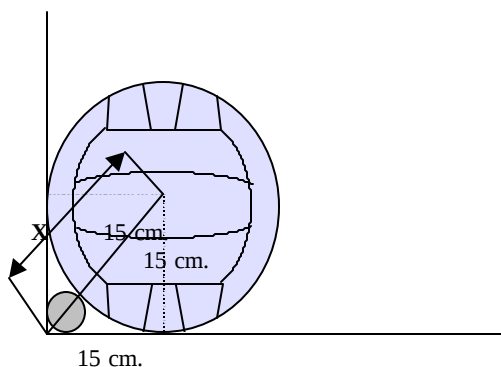
Solució: Tots són falsos llevat el que fa 9.

PROVA N° 9.- ESFERES

Solució: Si apliquem el Teorema de Pitàgoras en figura adjunta, obtenim:

$$X^2 = 15^2 + 15^2 \Rightarrow X = 21.21...$$

Aleshores, sobra un espai encara de: $21.21 - 15 = 6.21$ cm. i per tant, una pilota de 5 cm. de diàmetre sí que podria passar.



PROVA N° 10.- ANGLES

Solució:

L'angle 2 mesura 20° . Per ser el triangle isòsceles (dos costats són radis) els angles 4 i 5 són iguals. La suma dels angles 2, 3 i 4 és 90° , per què l'angle total abarca el diàmetre. D'estes dues condicions, s'obté que la suma dels angles 2 i 4 és igual a l'angle 7, i l'angle 7 és igual a dues voltes l'angle 4, d'on l'angle 2 és la meitat de l'angle 7. Per tant, l'angle 7 mesura 40° , els angles 4 i 5 mesuren 20° , l'angle 6 mesura 140° , l'angle 3 mesura 50° i els angles 8 i 9 són rectes.

Angle:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Mesura:	70°	20°	50°	20°	20°	140°	40°	90°	90°

PROVA N° 11.- BASQUET

Solució: $5 \times 197 - 208 + 203 = 980$. Aleshores, la nova mitjana és $980/5 = 196$ cm.

PROVA N° 12.- TALLEM EL CUB

Solució: El sòlid obtingut és un octaedre amb els seus vèrtex en els centres de simetria de les cares del cub (veure la figura). El volum de l'octaedre és igual al doble del volum de la piràmide quadrangular regular EABCD d'altura $a/2$ i la base de la qual ABCD té d'àrea $\frac{1}{2} a^2$. Aleshores,

el volum que busquem és igual a $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a/2 \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3}{6}$ cm³.

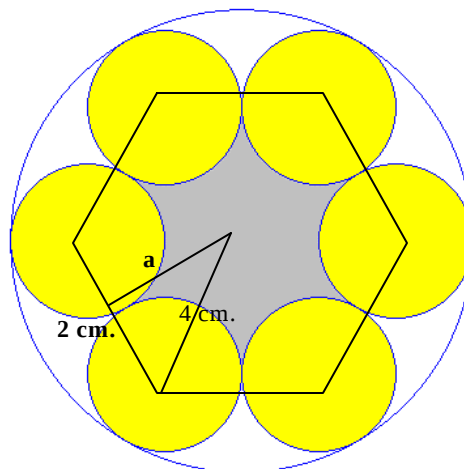
PROVA N° 13.- CIRCUMFERÈNCIES

Solució: Si unim els centres de les circumferències, obtenim un hexàgon regular de costat igual a 2 radis, angle interior igual a 120° i d'apotema igual a:

$$\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3.46 \text{ cm.}$$

L'àrea de la part ombrejada serà igual a la de l'hexàgon regular menys l'àrea de sis sectors, que en total formen 2 cercles ($120^\circ \times 6 = 720^\circ$)

$$A. \text{ ombrejada} = A_{\text{exag.}} - A_{\text{dos cercles}} = (24 \cdot 3.46)/2 - 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = 41.52 - 25.13 = 16.39 \text{ cm.}^2$$



PROVA N° 14.- GERMANS I GERMANES

Solució: Si el que parla en primer lloc és una dona, aleshores la que parla en segon lloc, que també és una dona, haurà de dir el mateix que la primera, i com no és així, la que parla en primer lloc ha de ser un home. Si anomenem $X = \text{n}^\circ$ de homes
 $Y = \text{n}^\circ$ de dones, aleshores:

$$\begin{aligned} X-1 &= Y \\ X &= 2(Y-1) \end{aligned}$$

La solució del sistema és que hi ha 3 dones i 4 homes.

PROVA N° 15.- DEL ZOOLÒGIC

$$(\text{ZOO})^2 = \text{TOPAZ}$$

Solució: Com el quadrat de ZOO té 5 lletres, la Z ha de ser 1, 2 o 3. Però no hi ha cap quadrat tal que acabe en 2 ni en 3, aleshores $Z=1$, i en conseqüència, $O=9$, quedant així el resultat: $(199)^2 = 39601$

$$Z=1 \quad O=9 \quad T=3 \quad P=6 \quad A=0$$

X OLIMPIADA MATEMÀTICA - FASE AUTONÒMICA
MORAIRA, 29 i 30 DE MAIG DE 1999

PROVA INDIVIDUAL - NIVELL A (2on. E.S.O.)

1.- Si es vol demostrar que Joan menteix, hi haurà que trobar:

a.- Una carta que tinga per una cara un número parell i per l'altra una consonant.

O bé,

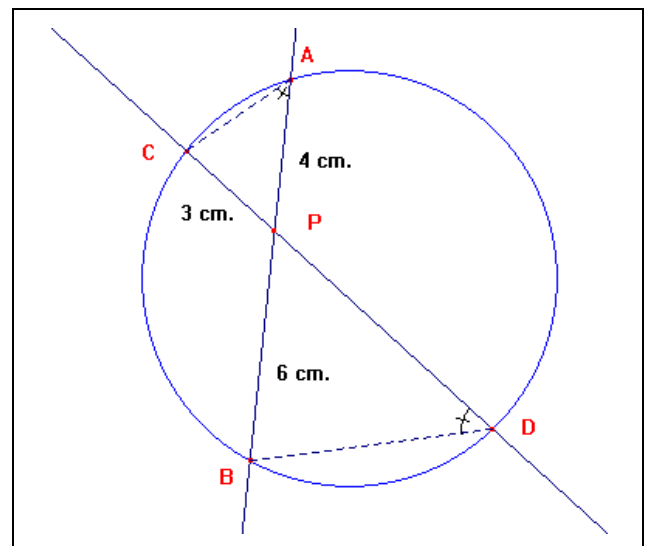
b.- Una carta que tinga per una cara un número senar i per l'altra una vocal.

Com únicament hi ha que girar una carta i trobem que hi ha quatre cartes que hi hauria que revisar per a assegurar-se la demostració segons l'apartat a.-, necessàriament caldrà acudir a l'apartat b.- del qual sols hi ha un cas: la carta que mostra el número 3.

2.- Si unim A amb C i B amb D, obtenim els triangles ACP i BDP que són semblants per tindre l'angle A igual al D, per abarcar el mateix arc, i l'angle P és oposat pel vèrtex. Aleshores, podem escriure:

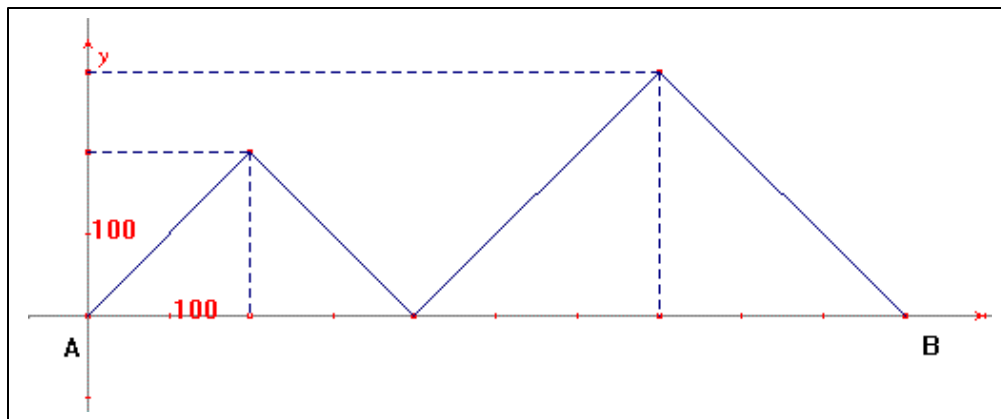
$$\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP} \quad \text{i} \quad \text{per tant,}$$

$$DP = \frac{AP \cdot BP}{CP} = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8 \text{ cm.}$$



3.-

a)



b) La màxima distància a una font d'aliment és de 300 Km. I es pot arribar a ella en el quilòmetre $x = 700$ de la ruta.

4.- Si els anomenem a , b i c , resulta que

$$\begin{aligned} a + b &= 38 \\ a + c &= 44 \\ b + c &= 52 \end{aligned}$$

Si sumem les tres equacions tenim que $a + b + a + c + b + c = 134$, o siga, que

$2(a + b + c) = 134$ i per tant, $a + b + c = 67$, d'on podem treure el que val cada lletra a partir de les tres primeres equacions:

$$\begin{aligned} c &= 67 - 38 = 29 \\ b &= 67 - 44 = 23 \\ a &= 67 - 52 = 15 \end{aligned}$$

5.- Si anomenem S a la suma de les notes dels sis primers exàmens, tindrem que $\frac{S}{6} = 8'4$, i

per tant, $S = 50'4$. Si ara ens diuen que X és la nota del seté examen, aleshores $\frac{50'4 + X}{7} = 8'5$ i per tant, $X = 7 \cdot 8'5 - 50'4 = 9'1$ punts.

6.- Si les tres dimensions són a , b i c , tindrem que:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 12 & b \cdot c &= 6 & a \cdot c &= 8, \text{ per la qual cosa,} \\ a \cdot b \cdot c \cdot a \cdot c &= 12 \cdot 6 \cdot 8, & \text{es a dir,} & & (a \cdot b \cdot c)^2 &= 576, \text{ i per tant, } a \cdot b \cdot c = 24 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

PROVA INDIVIDUAL - NIVELL B (4rt. E.S.O.)

1.- Sea $N = abcd$ el número buscado. Entonces se cumple que:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 45 \\ b^2 + d^2 = 53 \\ abcd - dcba = P, \text{ siendo } P \text{ un múltiplo de } 99 \text{ comprendido entre } 1000 \text{ y } 1200. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la escritura polinómica de un número en el sistema decimal, la última condición puede expresarse así:

$$1000(a - d) + 100(b - c) + 10(c - b) + (d - a) = P; \text{ o también: } 999(a - d) + 90(b - c) = P.$$

Como P está comprendido entre 1000 y 2000, su primera cifra es 1. Luego:

$$a - d = 1. \text{ De donde se deduce: } 90(b - c) = P - 999.$$

Solamente hay dos múltiplos de 99 comprendidos entre 1000 y 1200: $99 \times 11 = 1089$ y $99 \times 12 = 1188$.

Si $P = 1188$, entonces: $90(b - c) = 189 \rightarrow b - c = 2.1$. Lo que es imposible, porque b y c son dígitos enteros. Por lo tanto, debe ser $P = 1089$. Entonces: $90(b - c) = 90 \rightarrow b - c = 1$.

Como $a - d = 1$ y $b - c = 1$, deducimos que $a = d + 1$ y $b = c + 1$. Sustituyendo en las dos primeras ecuaciones, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} (d+1)^2 + c^2 = 45 \\ (c+1)^2 + d^2 = 53 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} d^2 + 2d + 1 + c^2 = 45 \\ c^2 + 2c + 1 + d^2 = 53 \end{array} \right\} \text{ Restando la segunda menos la primera,}$$

obtenemos: $2c - 2d = 8$. De donde: $c - d = 4$. Por tanto: $c = d + 4$. Sustituyendo en la segunda ecuación, queda:

$$(d+5)^2 + d^2 = 53 \rightarrow d^2 + 10d + 25 + d^2 = 53 \rightarrow 2d^2 + 10d - 28 = 0 \rightarrow d^2 + 5d - 14 = 0.$$

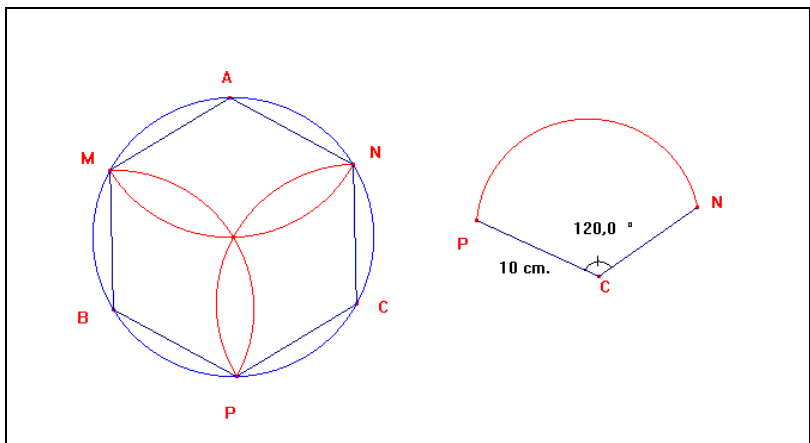
Resolviendo esta ecuación de segundo grado:

$$d = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} = \begin{cases} 2 \\ -7 \end{cases}. \text{ La solución negativa no es posible, pues } d \text{ es un dígito.}$$

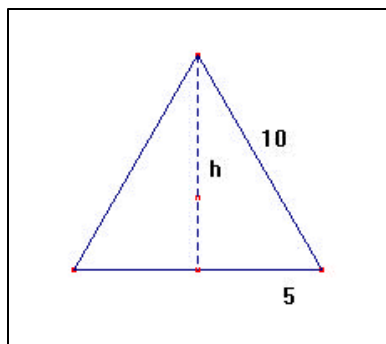
Por tanto, debe ser: $d = 2$. Luego $c = d + 4 = 6$; $b = c + 1 = 7$ y $a = d + 1 = 3$.

Solución: $a = 3$, $b = 7$, $c = 6$, $d = 2$. El número buscado es $N = 3762$.

2.- Sea b el área del hexágono $AMBPCN$. Sea a el área del sector circular NCP y sea S el área de la parte sombreada que pretendemos calcular. Se cumple que: $3\alpha = \beta + S$.



Ahora bien, $\alpha = \frac{p \cdot 10^2}{3}$ (corresponde a un ángulo central de 120° , es la tercera parte del área del círculo). Además, $\beta = 6W$, siendo W el área del triángulo equilátero de lado 10.



Por el teorema de Pitágoras,
 $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Luego: $W = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$.

Por tanto: $\beta = 6 \cdot W = 6 \cdot 25 \cdot \sqrt{3} = 150\sqrt{3}$.

Luego: $3\alpha = \beta + S \rightarrow S = 3\alpha - \beta = 3 \cdot \frac{p \cdot 10^2}{3} - 150\sqrt{3} = 100p - 150\sqrt{3} = 54'35 \text{ cm}^2$.

El área de la parte sombreada es $S = 100p - 150\sqrt{3} = 54'35 \text{ cm}^2$.

Cálculo del perímetro:

Se observa, por simetría respecto de la recta MN, que el arco MON es igual al arco MAN. De la misma forma, llegamos a que arco NOP = arco NCP y arco POM = arco PBM. Por tanto, el perímetro de la parte sombreada coincide con el perímetro del círculo, es decir, con la longitud de la circunferencia: $P = 2\pi \cdot 10 = 20\pi \approx 62'83 \text{ cm}$.

El perímetro de la parte sombreada es $P = 20p \approx 62'83 \text{ cm}$.

3.- Examinando casos particulares (de anchura 1, 3, 5, 7, 9, etc), podemos construir la siguiente tabla:

Anchura	1	3	5	7
Nº cuadrados	1	5	13	25

El término n de la anchura es $2n+1$. Para hallar el término n del Nº de cuadrados, tenemos en cuenta lo siguiente:

En una figura de anchura 9 hay
 $1+3+5+7+9+7+5+3+1$ cuadrados.

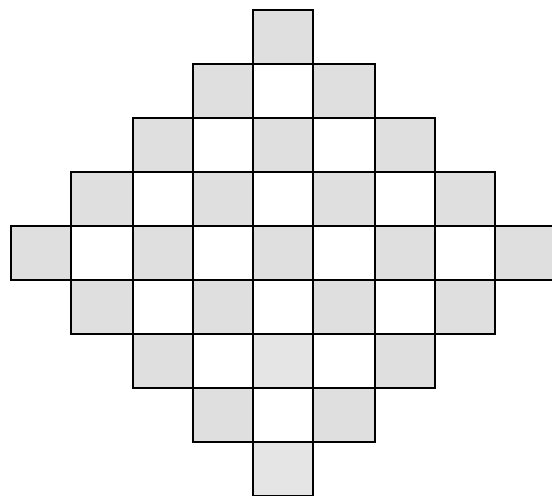
O sea: $2(1+3+5+7) + 9$ cuadrados.

Por tanto, en una figura de anchura $2n-1$, hay

$$2(1+3+5+\dots+(2n-3)) + (2n-1) =$$

$$= 2 \frac{1+2n-3}{2} (n-1) + (2n-1) = 2(n-1)^2 + 2n-1 =$$

$$2n^2 - 2n + 1$$



Si a la anchura de la figura la llamamos $N=2n-1$, despejando obtenemos $n = \frac{N+1}{2}$. Por lo tanto, sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos: $2n^2 - 2n + 1 = 2 \frac{(N+1)^2}{4} - 2 \frac{N+1}{2} + 1 = \frac{N^2 + 1}{2}$.

Es decir, en una figura de anchura N hay $\frac{N^2 + 1}{2}$ cuadrados. Por lo tanto, en una figura de anchura $N=99$ hay $\frac{99^2 + 1}{2} = 4901$ cuadrados.

4.- Sea **a** la longitud de la arista del nuevo sólido obtenido. Sea **x** la longitud de la parte de arista que seccionamos del cubo. Observamos en la siguiente figura que: $a + 2x = 1$.

Se cumple además que el triángulo determinado por la sección y las dos aristas del cubo que concurren en el vértice es a la vez rectángulo e isósceles. Por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$x^2 + x^2 = a^2 \rightarrow 2x^2 = a^2 \rightarrow a = \sqrt{2} \cdot x$$

Sustituyendo en la expresión $a + 2x = 1$, obtenemos:

$$\sqrt{2} \cdot x + 2x = 1 \rightarrow (\sqrt{2} + 2) \cdot x = 1.$$

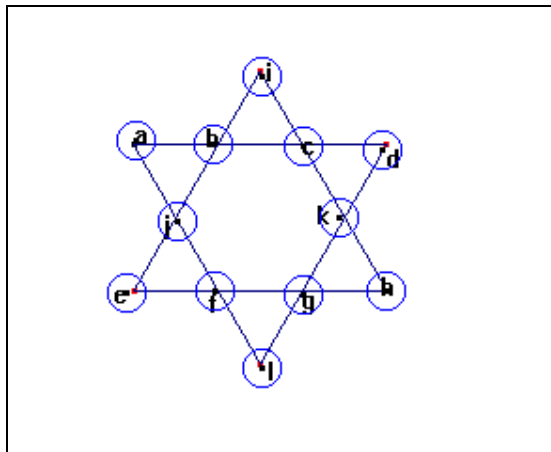
Por lo tanto, despejando y racionalizando:

$$x = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{(2 + \sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2})} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4 - 2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 29'3 \text{ cm}.$$

Debemos cortar la arista del cubo a una distancia del vértice de 29'3 cm aproximadamente.

El número de aristas del nuevo sólido es igual a 3×8 (de los vértices del cubo) más 12 (de las aristas del cubo), es decir, $3 \times 8 + 12 = 36$.

Por tanto, el perímetro del nuevo sólido es: $P = 36 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 18 \cdot (2 - \sqrt{2}) \approx 10'5 \text{ m}.$



El perímetro del sólido obtenido es $P = 18 \times (2 - \sqrt{2}) \approx 10'5 \text{ m}.$

5.- Por las condiciones del problema, si llamamos **x** a la suma de los cuatro números situados en cada lado de la estrella, deben cumplirse las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= x \\ e + f + g + h &= x \\ e + j + b + i &= x \\ i + c + k + h &= x \\ d + k + g + l &= x \\ a + j + f + l &= x \end{aligned}$$

Sumando las seis igualdades: $2(a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l) = 6x$

De donde: $a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l = 3x$.

Ahora bien, la suma $a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l$ debe ser igual, aunque posiblemente en orden distinto, a la suma de los doce primeros números naturales, es decir, debe cumplirse (utilizando el método de Gauss para sumar sucesiones aritméticas):

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = \frac{1+12}{2} \cdot 12$$

$$\text{En consecuencia, debe ser: } \frac{1+12}{2} \cdot 12 = 3x \rightarrow 13 \cdot 6 = 3x \rightarrow x = 26.$$

La suma de cada lado de la estrella debe ser igual a 26. Se trata, pues, de buscar grupos de cuatro números comprendidos entre 1 y 12, que sumen 26. Para ello utilizaremos las propiedades de simetría en la suma de los 12 primeros:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$$

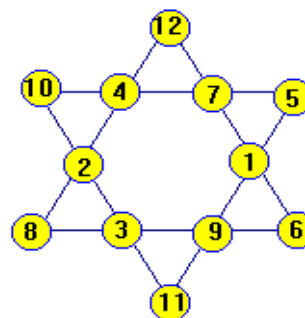
Así obtenemos las siguientes sumas posibles para cada lado de la estrella:

1+2+11+12	2+3+10+11	3+4+9+10	4+5+8+9	5+6+7+8
1+3+10+12	2+4+9+11	3+5+8+10	4+6+7+9	
1+4+9+12	2+5+8+11	3+6+7+10		
1+5+8+12	2+6+7+11			
1+6+7+12				

También podemos obtener sumas iguales a 26 de forma no simétrica:

1+4+10+11	2+3+9+12	3+4+7+12	4+5+6+11
1+5+9+11	2+4+8+12	3+4+8+11	4+5+7+10
1+6+8+11	2+5+7+12	3+5+6+12	
1+6+9+10	2+5+9+10	3+5+7+11	
1+7+8+10	2+6+8+10	3+6+8+9	
	2+7+8+9		

Por último, hay que combinar algunas de estas 33 sumas posibles para obtener soluciones, como por ejemplo, la que se muestra en la figura siguiente:



6.- Sea $x = n^0$ de manzanas que tenía Ana inicialmente. Entonces:

$$1^a \text{ venta} \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$$

$$2^a \text{ venta} \rightarrow \frac{1}{2} \left(x - \frac{x+1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$$

$$3^a \text{ venta} \rightarrow \frac{1}{2} \left(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$$

$$4^a \text{ venta} \rightarrow \frac{1}{2} \left(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4} - \frac{x+1}{8} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{16}$$

Y así sucesivamente. Sea n el número de ventas realizadas. Entonces, el número total de manzanas vendidas es igual a:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} + \frac{x+1}{16} + \dots + \frac{x+1}{2^n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \cdot (x+1) = p_n \cdot (x+1).$$

$$\text{Como } 2 \cdot p_n = 1 + \left(p_n - \frac{1}{2^n} \right), \text{ despejando resulta: } p_n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{Como, por otra parte, se vendieron todas las manzanas, debe ser: } \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \cdot (x+1) = x$$

$$\text{Quitando paréntesis y simplificando, queda: } \frac{1}{2^n} \cdot x = 1 - \frac{1}{2^n}. \text{ Despejando } x \text{ resulta:}$$

$$x = 2^n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 2^n - 1$$

Como efectuó no menos de cuatro ventas, debe ser $n \geq 4$ y como empezó la jornada con menos de 100 manzanas, debe ser $x \leq 100$. Entonces:

- Si $n=4$, se cumple que $x = 2^4 - 1 = 15$.
- Si $n=5$, se cumple que $x = 2^5 - 1 = 31$.
- Si $n=6$, se cumple que $x = 2^6 - 1 = 63$.
- Si $n=7$, se cumple que $x = 2^7 - 1 = 127$. Solución no válida.

Por lo tanto, hay cuatro posibles soluciones del problema:

$n=4$	$x=15$	En la primera casa vendió 8 manzanas; en la segunda 4; en la tercera 2 y en la cuarta 1.
$N=5$	$x=31$	En la primera casa vendió 16 manzanas; en la segunda 8; en la tercera 4; en la cuarta 2 y en la quinta 1.
$N=6$	$x=63$	En la primera casa vendió 32 manzanas; en la segunda 16; en la tercera 8; en la cuarta 4; en la quinta 2 y en la sexta 1.

PROVA PER EQUIPS - NIVELL A (2on. E.S.O.)**PROVA Nº 1.- ELS ENUNCIATS FALSOS**

Solució: Únicament son falsos los enunciados 2 y 4. Por tanto, la afirmación de hay tres enunciados falsos es falsa. Tenemos así el tercero de los enunciados falsos. ¿No es verdad?

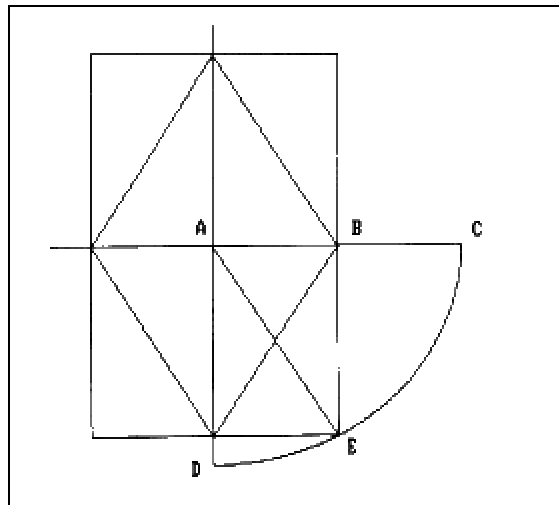
PROVA Nº 2.- LA TORRE EIFFEL

Solució: 875 toneladas. No sólo se reduce la altura de la torre, sino también su ancho y su profundidad, por lo que su peso disminuye a un octavo del peso original.

PROVA Nº 3.- EL COSTAT DEL ROMB

Solució: Basta con darse cuenta de que el lado AC es el radio de la circunferencia y AE y BD son diagonales de un rectángulo.

Por lo tanto, son iguales en longitud. Lado del rombo = 9 m.

**PROVA Nº 4.- ELS TATUADORS**

Solució: Dos tatuadores y medio.

PROVA Nº 5.- CALENDARI

Solució: En el de la izquierda: 0-1-2-6-7-8. En el de la derecha: 3-4-5-0-1-2. El 6 hace las veces de 6 y de 9.

**PROVA Nº 6.- ELS ATLETES**

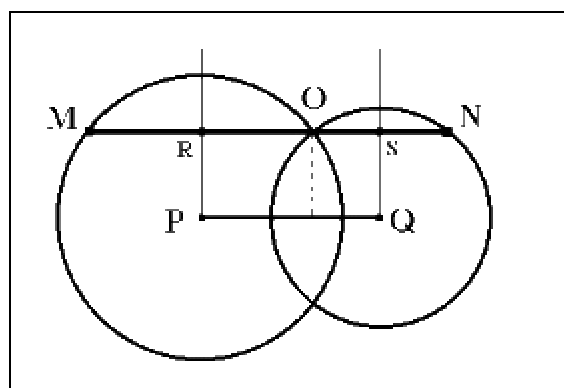
Solució: B – C – D – A

PROVA Nº 7.- ELS NOUS

Solució: Vint nous.

PROVA Nº 8.- CIRCUMFERÈNCIES

Solució: . MN = 6 centímetres. Trazando desde P y Q perpendiculares al segmento MN, obtenemos los puntos R y S. Como MR=RO y NS=SO y RS=PQ, surge la respuesta.



PROVA N° 9.- EL TRIANGLE D'ÀREA MÀXIMA

Solució: . Como el área de un triángulo es máxima cuando sea máxima la altura, considerando como base uno de los lados iguales, la altura máxima se conseguirá cuando el otro lado esté perpendicular al anterior; es decir la altura mide 4 cm. El tercer lado entonces será la hipotenusa, es decir, $32=5'65$ cm.

PROVA N° 10.- LA NOTA MITJANA

Solució: La nota mitjana és 8.

PROVA N° 11.- QUADRAT MÀGIC

Solució:

1	20	9	23	12
24	13	2	16	10
17	6	25	14	3
15	4	18	7	21
8	22	11	5	19

PROVA N° 12.- LES MONEDES

Solució: No hi ha solució possible.

PROVA N° 13.- PARELLS I SENARS

Solució: Nomenem a, b, c, d, e i f als sis números. Dir que a·b·c·d és senar suposa que cap d'ells és parell, per tant, a+b i c+d donaran resultat parell i com l'últim és parell, aleshores el quint serà necessàriament parell, per a que la suma (a+b)+(c+d)+e+f siga parell.

PROVA N° 14.- EL TIMBRE DEL TELÈFON

Solució: Representem per la lletra t el toc de timbre i per s el silenci entre dos tocs de timbre consecutius.

t	s	t	s	t	s	t	s	t	24 seg.
t	s	t	s	t					14 seg.

Si eliminem la part comú resulta:

	s	t	s	t	10 seg.
--	---	---	---	---	--------------

I com:

t	s	t	s	t	14 seg.
	s	t	s	t	10 seg.
t					4 seg.

Aleshores, $4 + s + 4 + s + 4 = 14$, i per tant $2s = 2$, i $s = 1$ seg.

PROVA N° 15.- MESUREU L'ANGLE

Solució: Puesto que es isósceles: $B = C = (180^\circ - A)/2 = 130^\circ/2 = 65^\circ$.
 Por lo tanto: $x = 180^\circ - C = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

PROVA PER EQUIPS - NIVELL B (4rt. E.S.O.)**PROVA N° 1.- EL TRANSPORT PER A LES VACANCES**

Solució: En cotxe.

PROVA N° 2.- QUIN PRODUCTE!

Solució: Si factoritzem 555555 tenim:

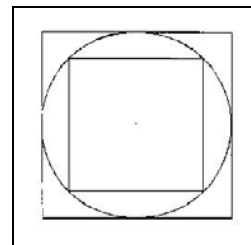
$$555555 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$$

Haurem d'agrupar en dos grups els factors, de manera que en cada grup el producte siga menor que 1000.

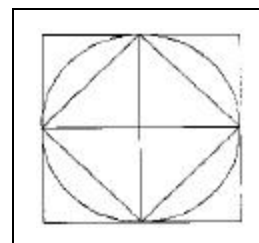
$\frac{1000}{37} = 27'02...$ Aleshores en el grup del 37 puc posar 3 o 5 o 7 o 11 o 13 o 3 i 5 o 3 i 7. El major producte s'obté amb 3 i 7: $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$

En l'altre grup queden 5, 11 i 13:

$$5 \cdot 11 \cdot 13 = 715$$

Els números que ens interessa són 715 i 777.**PROVA N° 3.- ELS DOS QUADRATS**

Solució: En lloc de inscriure el quadrat com es mostrava a la figura anterior, hagámoslo girar 45 graus fins a la posició que mostra la figura següent.



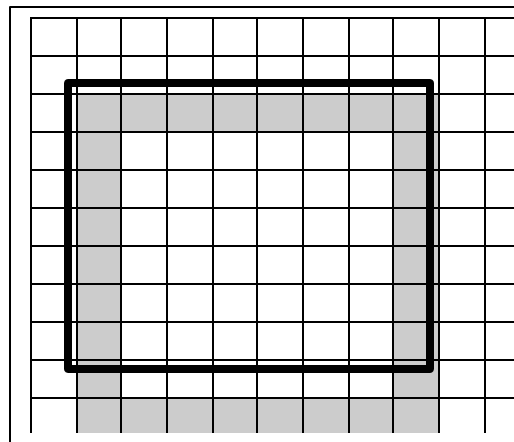
Se observa que el àrea del quadrat major és el doble que la del inscrit; es diu, 8 unitats.

PROVA N° 4.- RECTANGLE OMBREJAT

Solució: Si anomenem m i n a les dimensions del rectangle, el número de caselles ombrejades del contorn per l'interior serà de $2m+2n-4$. Aquest contorn deixa al seu interior un número de caselles que serà de $(m-2)(n-2)$. Aleshores, la relació que s'ha de complir serà que: $2m+2n-4 = (m-2)(n-2)$. Fent operacions, resulta que: $mn - 4m - 4n + 8 = 0$, o siga, $m(n-4) = 4n - 8$

$$\text{I per tant, } m = \frac{4n-8}{n-4} = \frac{4(n-4)+8}{n-4} = 4 + \frac{8}{n-4}$$

Això implica que per a que obtinguem un parell de valors enters que serien la solució del problema, el denominador que hi ha al segon membre ha de ser divisor de 8, o siga, que pot ser un número entre $\{1, 2, 4, 8\}$

Si $n-4=1 \Rightarrow n=5$ i $m=12$ Si $n-4=2 \Rightarrow n=6$ i $m=8$ Si $n-4=4 \Rightarrow n=8$ i $m=6$ 

Si $n-4=8 \Rightarrow n=12$ i $m=5$

Aleshores, hi ha dos possibles solucions al problema: les dimensions del rectangle poden ser 5 X 12 o bé 6 X 8.

PROVA N° 5.- ANY 1999

Solució: Trobarem les solucions enteres positives de l'equació: $1999 = m^2 - n^2$

Si factoritzem el segon membre ens resulta: $1999 = (m-n)(m+n)$

El número 1999 és primer, i $m+n$ és positiu, aleshores ha de ser

$$m - n = 1 \quad i \quad m + n = 1999$$

De la primera equació tenim que $m = n + 1$, i substituïnt en la segona,

$$n + 1 + n = 1999, \text{ aleshores, } 2n = 1998, \quad n = \frac{1998}{2} = 999, \quad i \text{ per tant, } m=1000$$

PROVA N° 6.- LA MOSCA CAPRITXOSA

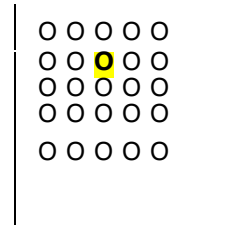
Solució: . Son muchas 25 monedas. Vamos a probar con menos, por ejemplo, con $2 \times 2 = 4$ monedas. Así:

O O
O O

Es obvio que se pose donde se pose, la mosca tiene el camino bien fácil.

Probemos con $3 \times 3 = 9$ monedas. Así:

O O O
O O O
O O O



Si la mosca se posa en una esquina también lo tiene fácil. Si se posa en el centro, también.

Pero si se posa en cualquier otra moneda, como fácilmente se observa, lo tiene imposible.

Así, en el caso de $3 \times 3 = 9$ monedas, a veces se puede hacer el paseo, y otras no. Podemos sospechar que en el de $5 \times 5 = 25$ monedas suceda algo parecido.

¿Por qué no se puede hacer el paseo en algunos casos cuando hay 9 monedas?

Señalemos los centros de las monedas con coordenadas:

(-1,1) (0,1) (1,1)
(-1,0) (0,0) (1,0)
(-1,-1) (0,-1) (1,-1)

Es curioso: ¡los puntos desde los que el paseo no se puede hacer son (0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0)! En ellos, la suma de las coordenadas es impar. En los restantes, la suma de las coordenadas es par. Llamaremos pares a estos vértices y, a los otros, impares.

Hay cuatro vértices impares y cinco pares. El paseo de la mosca, empezando por un vértice impar, sería:

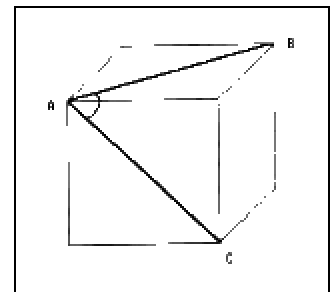
Impar Par Impar Par ...

Si terminase en impar, habría más vértices impares que pares. Si terminase en par, habría igual número de las dos clases. Ambas cosas son falsas. ¡La mosca no puede hacer el paseo saliendo de un vértice impar!

Esto da luz más que suficiente para tratar el caso de 5×5 monedas. El camino en los casos en los que se puede hacer se encuentra fácilmente.

PROVA N° 7.- DIAGONALS DEL CUB

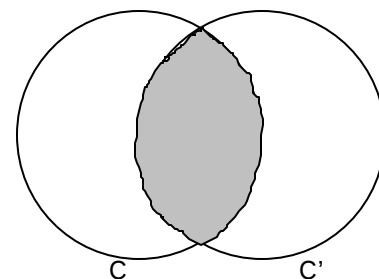
Solució: .60°. Basta observar de que se trata de un triángulo equilátero ABC trazando la diagonal BC de la otra cara.



PROVA N° 8.- CERCLES SECANTS

Solució: Els punts d'intersecció de les circumferències formen amb el centre de cadascuna un angle de 120° , o siga, $\frac{2p}{3}rd$. Aleshores, la longitud de cada arc

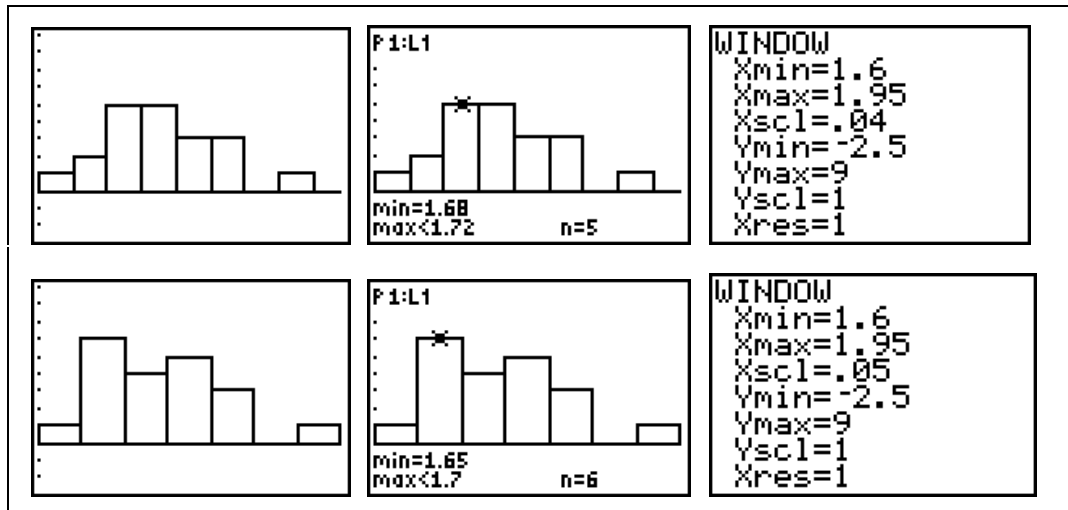
serà de $\frac{2p}{3} \cdot R$ i aleshores el perímetre demanat serà el doble.



PROVA N° 9.- LES ALTURES

Solució: Qualsevol de les dues següents representacions són vàlides:

La gràfica de la primera fila correspon a una distribució del rang en rectangles de 0.04 cm. d'amplària, mentre que la de la segon fila correspon a rectangles de 0.05 cm. d'amplària. En el primer cas agruparíem la distribució en 9 intervals, mentre que en el segon cas seria en 7 intervals de classe.



PROVA N° 10.- SEGMENTS EN UNA TRAMA

Solució.- En una trama $n \times n$ podem construir la següent taula on estan totes les distàncies:

1	2	3	4	...	n-1
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	...	$(n-1)\sqrt{2}$
	$\sqrt{2^2+1}$	$\sqrt{3^2+1}$	$\sqrt{4^2+1}$	...	$\sqrt{(n-1)^2+1}$
		$\sqrt{3^2+2^2}$	$\sqrt{4^2+2^2}$	...	$\sqrt{(n-1)^2+2^2}$
				...	...
					$\sqrt{(n-1)^2+(n-2)^2}$

PROVA N° 11.- EL DAU TRUCAT

Solució: Siga $P(1)=p$. Aleshores, $P(2)=2p$, $P(3)=3p$, $P(4)=4p$, $P(5)=5p$, i $P(6)=6p$. Com la suma de les probabilitats ha de ser 1, es tindrà que $p+2p+3p+4p+5p+6p=1$, aleshores, $p=1/21$. Les probabilitats seran:

X_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	1/21	2/21	1/7	4/21	5/21	2/7

- a) $P(\text{parell})=4/7$ b) $P(\text{primer})= 11/21$ c) $P(x<3)= 1/7$

PROVA Nº 12.- LA XIFRA DE LES UNITATS

Solució: Anem a observar com és la xifra de les unitats de cada potència implicada. La potència 5 d'un número té la mateixa xifra de les unitats que el mateix número, perquè $N^5 - N = N(N^4 - 1) = N(N+1)(N-1)(N^2+1)$. $N^5 - N$ és evidentment parell. Aleshores, es demostra tenint en compte les anteriors igualtats que el número és divisible per 5:

Si $N=5k$, aleshores és evident.

Si $N=5k+1$, aleshores $N-1=5k$

Si $N=5k+2$, aleshores $N^2+1 = (5k+2)^2+1 = 5t+4+1=5(t+1)$

Si $N=5k+3$, aleshores $N^2+1 = (5k+3)^2+1 = 5t+9+1= 5(t+2)$.

Si $N=5k+4$, aleshores $N+1 = 5(k+1)$. De manera que $N^5 - N$ és divisible per 10, aleshores acaba en 0, la qual cosa demostra que N^5 i N tenen la mateixa xifra de les unitats.

Qualsevol potència d'un número acabat en 5, acaba en 5.

Qualsevol potència d'un número acabat en 1, acaba en 1.

La xifra buscada de les unitats és, doncs, $(7-5) \cdot 1=2$.

PROVA Nº 13.-DEL 0 AL 9

Solució:

6	2	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PROVA Nº 14.- ORDENEU PARAULES

Solució: Amb les lletres de la paraula OPTAR es poden formar $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ paraules. En l'ordre alfabètic, després de la 116^a paraula hi haurà sols 4 paraules més.

Posició	120	119	118	117	116
Paraula	TRPOA	TRPAO	TROPA	TROAP	TRAPO

La paraula que ocupa el lloc 116 és TRAPO.

PROVA Nº 15.- QUADRATS

Solució: La superfície del rectangle és coneguda, ja que és la suma de les superfícies de tots els quadrats: $1^2+4^2+7^2+8^2+9^2+10^2+14^2+15^2+18^2 = 1056 \text{ cm}^2$.

Aquest número, 1056, ha de ser producte de altres dos naturals que seran la base i l'altura del rectangle. Com $1056 = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$, podem descomposar-lo així:

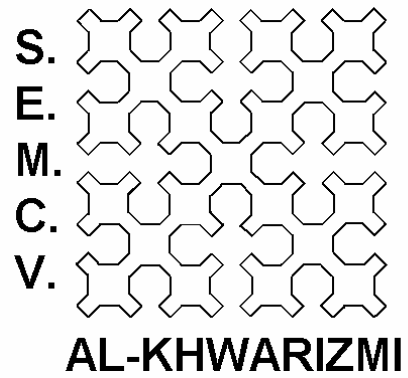
$$1056 = 32 \cdot 33$$

$$1056 = 2 \cdot 528$$

$$1056 = 22 \cdot 48 \dots$$

D'aquestes descomposicions sols interessen les que es puguin obtenir sumant les dimensions dels quadrats. Per exemple, en $1056=22 \cdot 48$, veiem que 22 i 48 no es poden obtenir sumant tots o alguns dels números 1, 4, 7, 8, ..., 15 i 18.

Fent una recerca similar, arribem a que una possible solució és:



**Societat d'Educació Matemàtica de la
Comunitat Valenciana
"Al-Khwarizmi"**