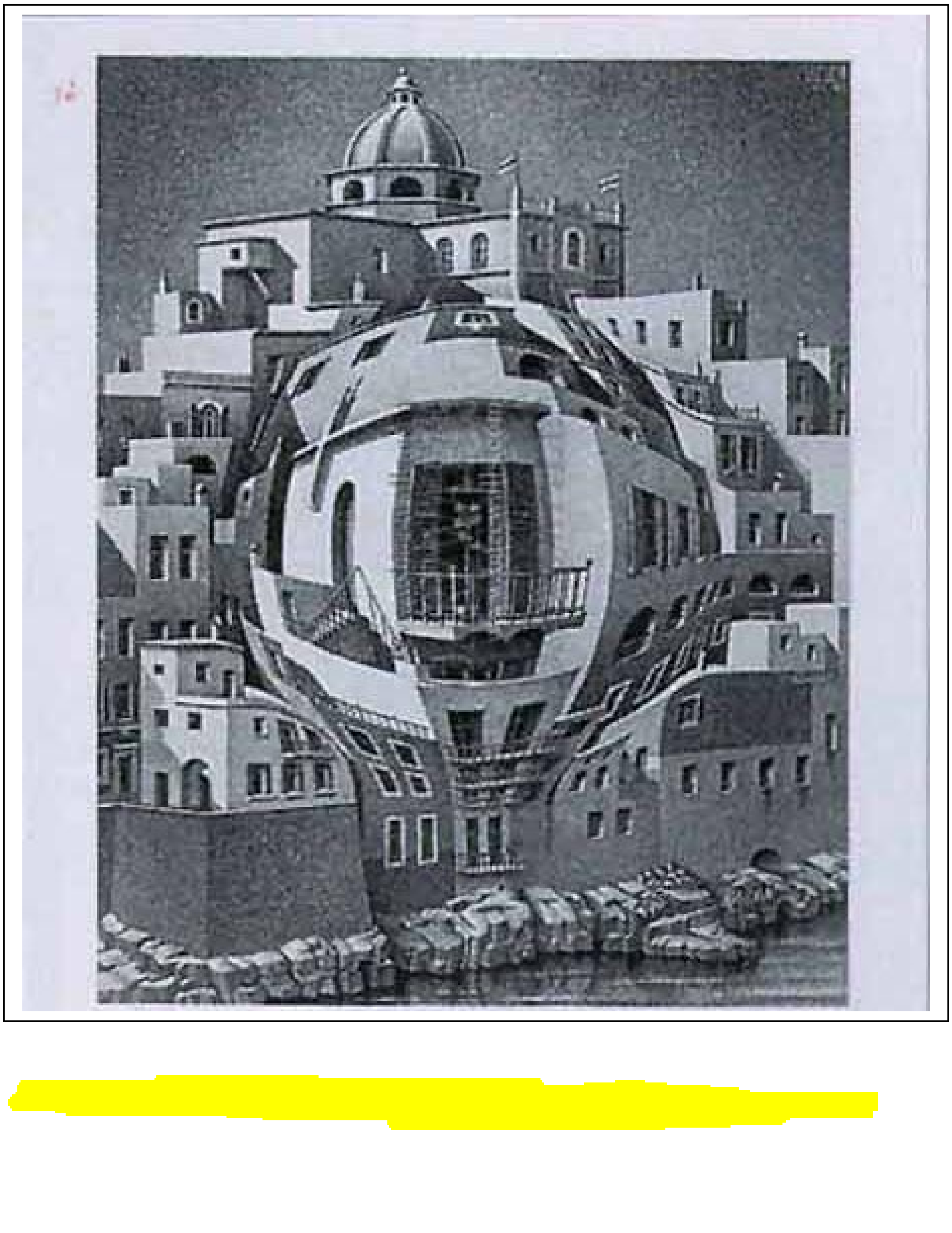
S.
E.
M.
C.
V.
AL-KHWARIZMI

PROBLEMES OLÍMPICS



Revista de problemes de Matemàtiques
Número 4. Abril 2000

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

1.- CERVELLÍN I ELS SEUS AMICS

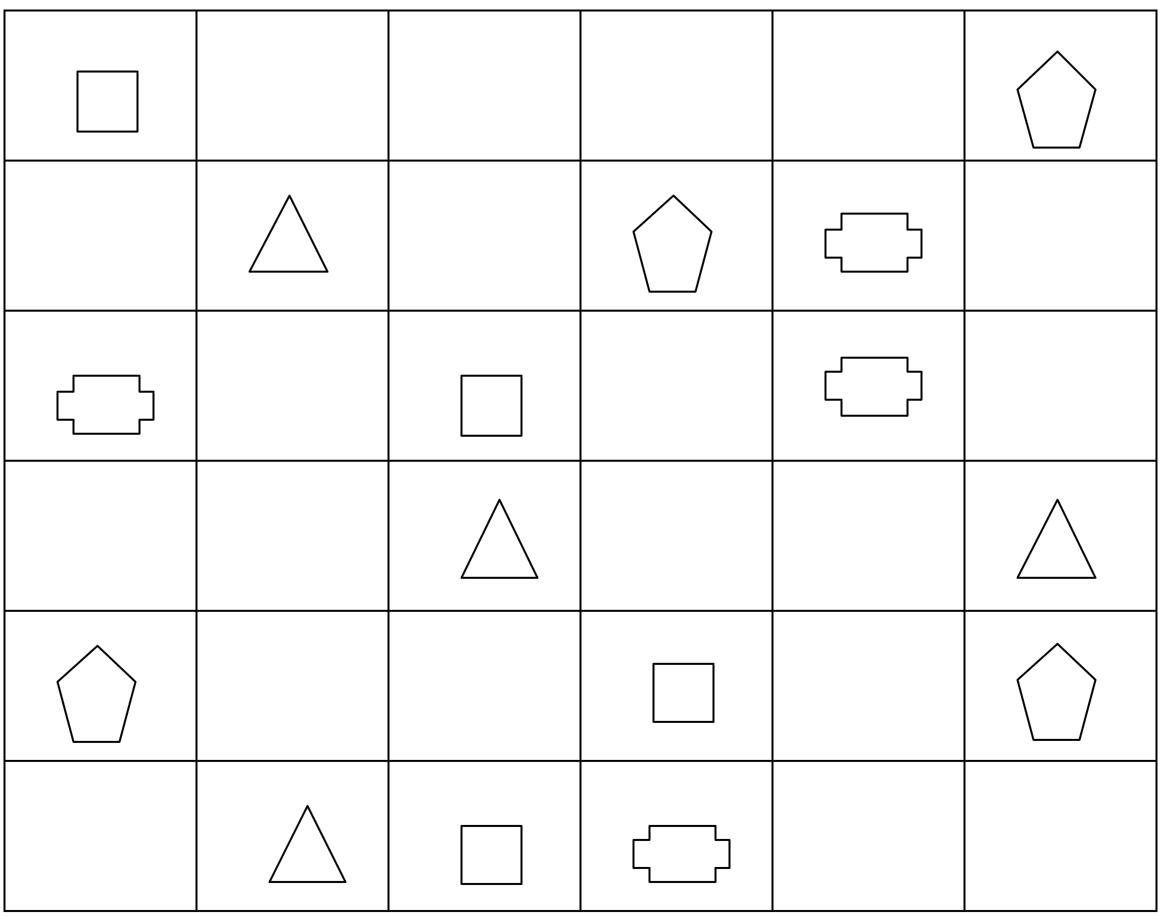
Cervellín té més de 100 llibres, va dir Ferran el Perillós. D'això res, va replicar Anna , té molts menys. Bé, va dir l'empollona Mónica, algun llibre tindrà. Si a soles una de les tres afirmacions és certa, quants llibres té Cervellín?

2.- FENT TORRADES

En una torradora poden torrar-se dues llesques de pa per una cara en dos minuts. ¿Quan de temps es tardarà en torrar tres per les dues cares? Troba el mètode més ràpid de torrar qualsevol nombre de torrades.

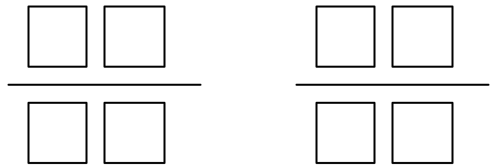
3.- QUADRAT

Divideix aquest quadrat en quatre parts que tinguen la mateixa forma i la mateixa àrea. Cada part ha de contenir els quatre símbols que apareixen, un en cadascuna.



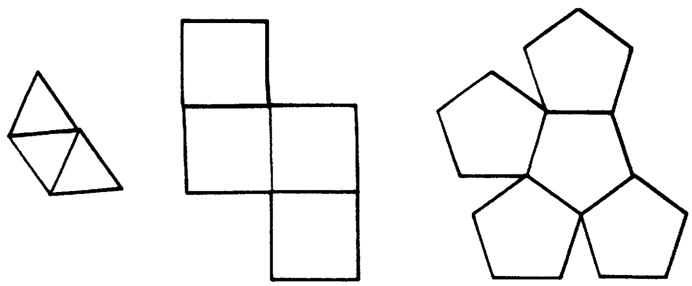
4.- UNA XIFRA EN CADA CASELLA

Col·loca les xifres de l'1 al 8, una en cada casella, de forma que resulten dues fracciones equivalents .



5.- SEQÜÈNCIA

¿Quina de les següents figures A,B,C o D seria la propera en aquesta seqüència?

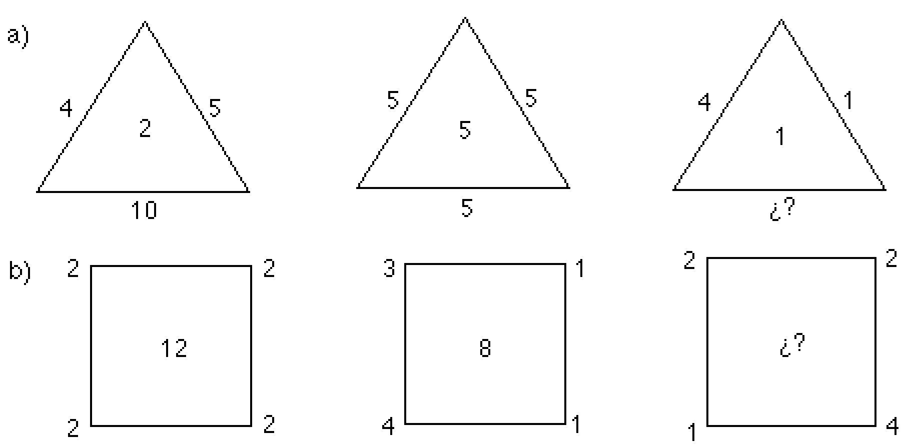


6.- ¿QUIN NOMBRE FALTA?

7	**1**	**2**	**4**
5	**4**	**3**	**3**
11	**3**	**¿?**	**7**

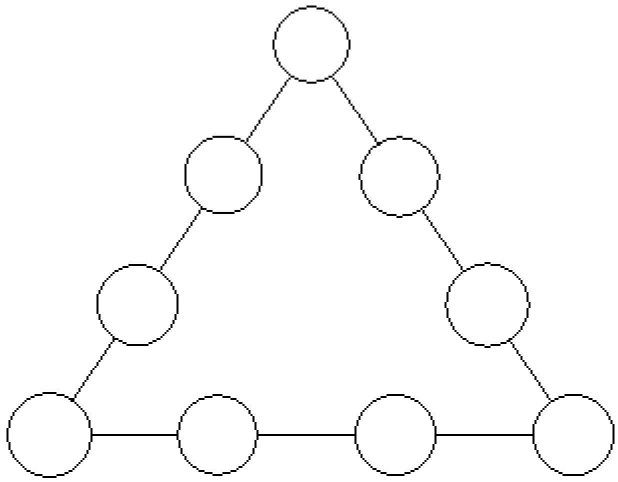
7.- MES SEQÜÈNCIES

Quin és el nombre que falta en cadascuna de les seqüències següents?.



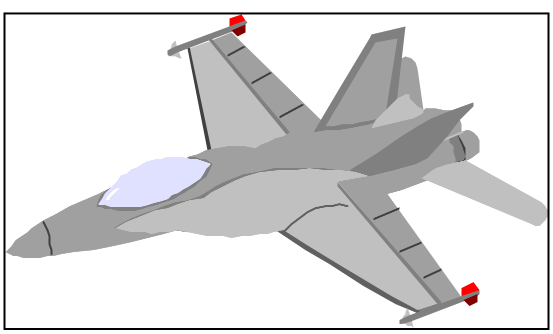
8.-TRIANGLE NUMÈRIC

Col·loca les xifres de l'1 al 9 als cercles del següent triangle, per a que la suma dels tres costats siga la mateixa. Troba totes les solucions possibles.



9.- VIATGES

Una agencia de viatges ofereix tres tipus d'excursions per 1600, 1700 i 1800 dòlars, respectivament. Durant l'última setmana va recaptar 20000 dòlars en concepte de ventes de les esmentades excursions. Amb aquestes dades, es podrà obtenir el nombre d'excursions venudes a l'esmentada setmana?.

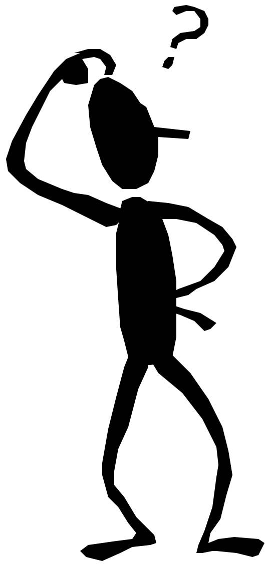


10.- PRODUCTE ALFABÈTIC

Calcula el valor del següent producte: (x-a) (x-b) (x-c) ... (x-z) = ?

11.- POBRE PÍO

A una làpida es pot veure la següent inscripció: “Ací està Pío Niro, mort a 1971, va viure tants anys com la suma de les xifres del any del seu naixement”. A quina edat va morir?.



12.- PRIMERS CAP-I-CUES

N’hi ha 5 nombres primers cap-i-cues del 100 al 200, els quals son: 101, 131, 151, 181 i 191. Del 300 al 400 n’hi ha 4 primers cap-i-cues, els quals son: 313, 353, 373 i 383. Quants nombres primers cap-i-cues n’hi ha entre 200 i 300?.

13.- PRODUCTE DE PRIMERS

Observa els productes següents: $1\times2=2$ que és primer, $1\times3=3$ que també és primer. Troba dos nombres primers del 10 al 50 de forma que el resultat del seu producte també siga un nombre primer.

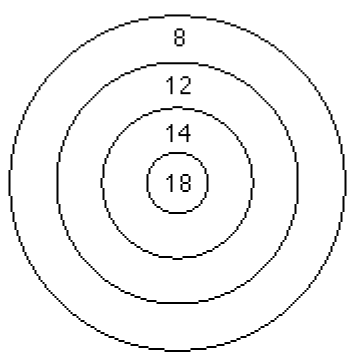
14.- L’EQUACIÓ DEL SOLITARI

Sense fer operacions, troba el valor de A:

$$A = 83\,875\,683\,470^2 - (83\,875\,683\,469 \times 83\,875\,683\,471)$$

15.- UNA DIANA

Deu fletxes es llancen sobre aquesta diana. Una d’elles falla el tir completament. Totes les demés es claven en ella. Si la suma total de punts obtinguts és 100, en quina part de la diana s’ha clavat cadascuna de les fletxes?. (En cada sector està indicada la puntuació corresponent).



PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

1.- EL TERCER FILL

Joan diu: "Tinc 5 fills i han nascut cada quatre anys. L'edat del meu fill major és 9 vegades la del meu fill menut". Quina és l'edat del tercer fill de Joan?.

2.- ÀREA OMBREJADA I

Calcula l'àrea ombrejada si se sap que la mesura del costat del quadrat més gran es L:

3.- EDATS

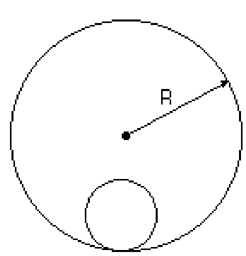
Una mare comenta: " He observat que l'edat de la meua filla es la meua però amb les xifres en ordre invers. A més si sume les xifres de l'edat de la meua filla em dona la tercera part de l'edat que tenia jo quan vaig tindre a la meua filla". Sabries dir quina edat tenia aquesta dona quan va tindre la seua filla?.

4.- UNA IGUALTAT

Sabem que $4x^4 = 2z^2$. Si multipliquem el nombre x per 4, per quin nombre hem de multiplicar z per tal que la igualtat seguisca sent vàlida?.

5.- UNA MONEDA

Una moneda roda per dins d'uns anell circular de radi R, de manera que la moneda està cap avall quant torna a la seua posició inicial a la primera volta. Calcula el major radi possible de la moneda.



6.- L'ANY 2000

Estem a l'any 2000, l'any internacional de les Matemàtiques. L'any que ve, el 2001, és el primer any del tercer mil·leni. Si multipliquem el nombre 2001 per un nombre format per 2000 xifres totes elles igual a 1, sabries calcular la suma de les xifres del resultat d'aquesta multiplicació?.

7.- CARNESTOLTES

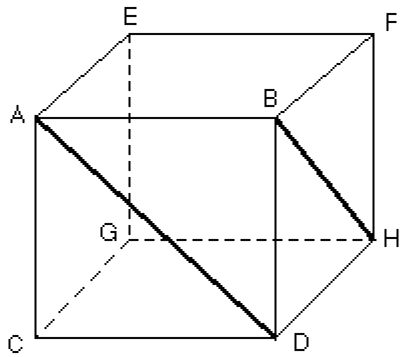
Forme part d'un grup d'amics que estem arreplegant diners per a fer-nos les disfresses de carnestoltes. En el grup som 6, i em posat una mitjana de 8 euros per persona. Si jo he posat 10 euros, quina és la mitjana d'euros de les altres cinc persones?.

8.- ESCACS

En un tauler d'escacs de 8×8 caselles, quants quadrats diferents podem formar amb les caselles del tauler?.

9.- ANGLE D'UN CUB

Calcula l'angle que formen les diagonals AD i BH en el següent cub:



10.- TRIANGLE

La suma de les longituds dels costats d'un triangle rectangle es 18 unitats i la suma dels seus quadrats es 128 unitats. Quina és l'àrea d'aquest triangle?.

11.- PRODUCTES NUMÈRICS

Quants nombres enters, estrictament positius i estrictament menors que 1000 son producte de dos nombres múltiples de 3?.

12.- MESURES DE CAPACITAT

Amb un gerro de 5 litres de capacitat i una altre de 3 litres de capacitat, com podríem mesurar exactament 1 litre?.

13.- ÀREA OMBREJADA II

Calcula l'àrea ombrejada de la següent figura:

SOLUCIONS

PROBLEMES NIVELL A (2on. ESO)

1.- CERVELLÍN I ELS SEUS AMICS

Existeixen tres combinacions possibles de vertader i fals per a les afirmacions anteriors: VFF, FVF , FFV . La única combinació no contradictòria és FVF, el que implica que Cervellín no té cap llibre . DIFICULTAT: 20

2.- FENT TORRADES

Si tenim la torradora durant 3 minuts podríem torrar 3·2 cares de llesques, és a dir, 6 cares de torrades, o el que és equivalent a tres torrades. Es a dir, podem torrar tres llesques en tres minuts, de la següent forma (suposem que les llesques son A, B i C i que cadascuna d'elles té dos cares, 1 i 2):

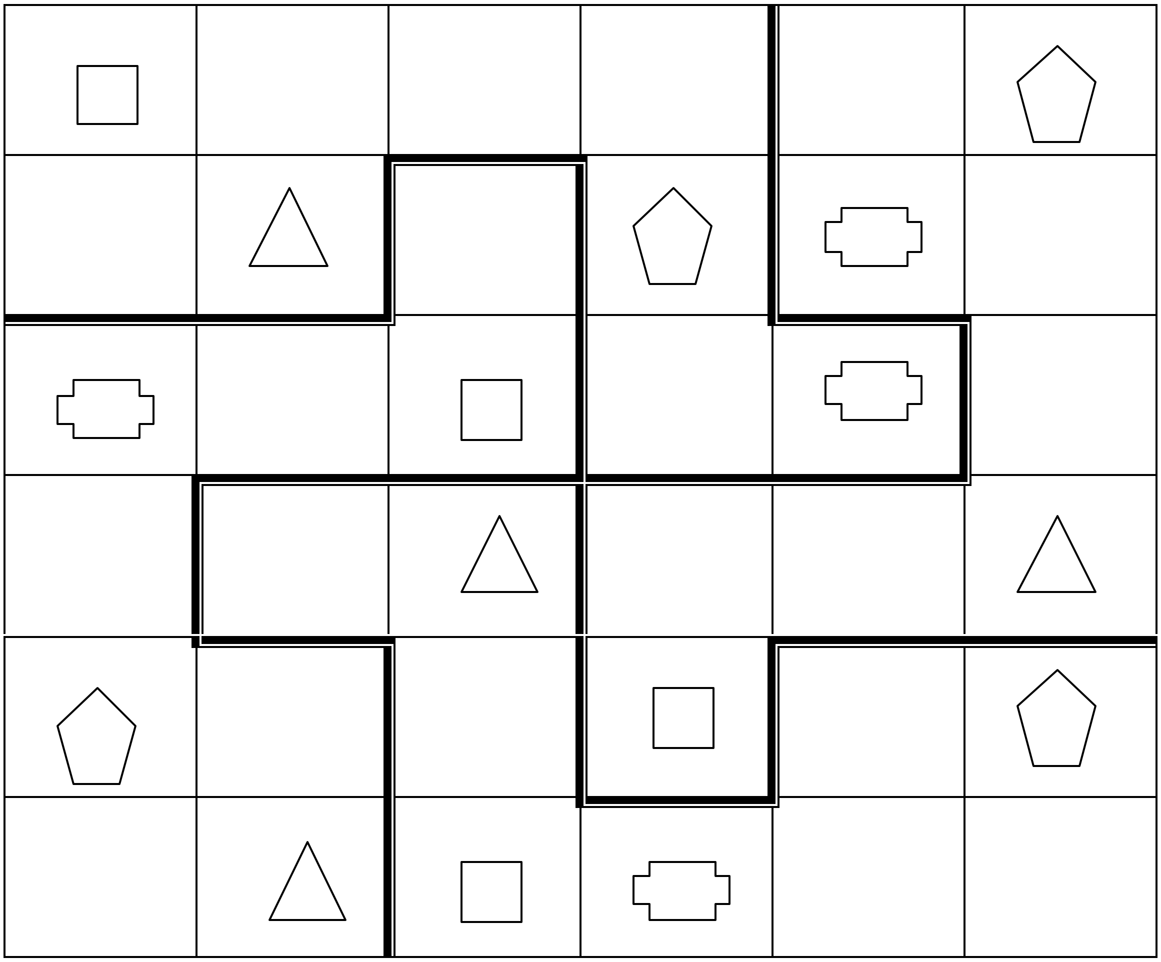
- Minut 1. Torrar les cares A1 i B1. Llevar les llesques i donar la volta a B, tornant a posar-la a la torradora. Posar en un lloc a part A i col·locar C a la torradora .
- Minut 2. Torrar les cares B2 i C1. Llevar les llesques i donar la volta a C, tornant a posar-la a la torradora. Posar en un lloc a banda B (que està torrada per les dues bandes) i col·locar A un altre cop a la torradora.
- Minut 3. Torrar les cares A2 i C2. Totes les cares de les tres llesques estan torrades ara.

De la mateixa forma podem fer quatre, cinc, sis, set, … torrades. Organitzem la informació a la següent taula:

NOMBRE DE TORRADES	NOMBRE DE CARES	FORMA DE TORRAR	TEMPS EMPRAT
3	3·2=6	A1 B1 B2 C2 A2 C2	3 minuts
4	4·2=8	A1 B1 A2 B2 C1 D1 C2 D2	4 minuts
5	5·2=10	A1 B1 Z2 B2 C1 D1 D2 E1 C2 E2	5 minuts

Per tant: "Per a torrar n torrades tardaré n minuts". Però aquesta afirmació no es compleix per a 1 torrada, on es precís 2 minuts. DIFICULTAT: 40

3.- QUADRAT



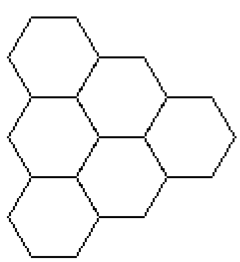
DIFICULTAT: 40

4.- UNA XIFRA EN CADA CASELLA

$\dfrac{1 \quad 8}{3 \quad 6}$ $\qquad$ $\dfrac{2 \quad 7}{5 \quad 4}$ DIFICULTAT: 20.

5.- SEQÜÈNCIA

La primera figura està formada per 3 polígons de 3 costats. La segona figura està formada per 4 polígons de 4 costats. La tercera figura està formada per 5 polígons de 5 costats. Aleshores, la figura te que ser una figura formada per 6 polígons de 6 costats, és a dir,



DIFICULTAT: 10

6.- QUIN NOMBRE FALTA?

En cada línia, el tercer nombre és igual a la suma del dos nombres precedents dividida pel nombre següent:

7 + 1 = 8/4 = 2, 5 + 4 = 9/3 = 3, 11 + 3 = 14/7 = 2

7	1	2	4
5	4	3	3
11	3	2	7

DIFICULTAT: 30

7.- MÉS SEQÜÈNCIES

a) El nombre que falta és 14. b) El nombre que falta és 4. DIFICULTAT: 10

8.- TRIANGLE NUMÈRIC

N'hi ha tres solucions, segons que les sumes per cada costat siguen 23, 20 o 17. DIFICULTAT: 30

9.- VIATGES

N'hi ha que contractar 5 excursions de 1600 dòlars, 6 excursions de 1700 dòlars i una excursió de 1800 dòlars, ja que $5\times1600+6\times1700+1\times1800 = 20000$. DIFICULTAT: 20

10.- PRODUCTE ALFABÈTIC

El resultat del producte es 0, ja que n'hi ha un factor igual a 0, que és (x-x). DIFICULTAT: 20

11.- POBRE PÍO

Va nàixer a 1953. Va morir als 18 anys. DIFICULTAT: 30

12.- PRIMERS CAP-I-CUES

No n'hi ha cap. Si n'hi haguera algun, la seua última xifra hauria de ser 2 i, per tant, no pot ser primer. DIFICULTAT: 10.

13.- PRODUCTE DE PRIMERS

No pot ser. Si $a\times b=c$, aleshores el nombre c ja no es primer. DIFICULTAT: 20

14.- L'EQUACIÓ DEL SOLITARI

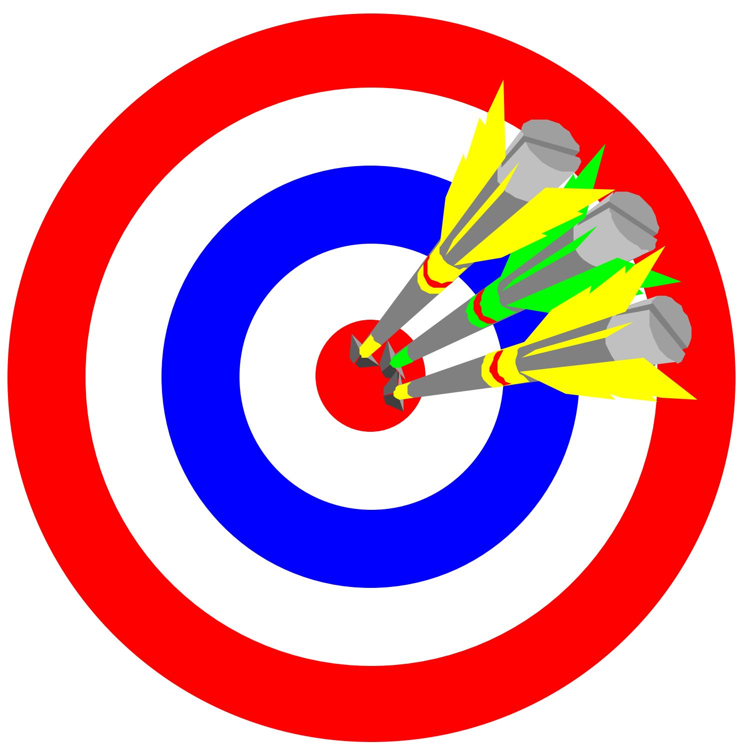
Es compleix: $A=a^2-(a-1)\cdot(a+1)=a^2-(a^2-1)=1$. La solució es, per tant, 1. DIFICULTAT: 20

15.- UNA DIANA

A la següent taula presentem algunes solucions:

SECTOR 18	SECTOR 14	SECTOR 12	SECTOR 8	PUNTUACIÓ TOTAL
1	1	3	4	1×18+1×14+3×12+4×8=100
0	0	7	2	7×12+2×8=100
0	4	1	4	4×14+1×12+4×8=100

N'hi ha més solucions?. DIFICULTAT: 50



SOLUCIONS

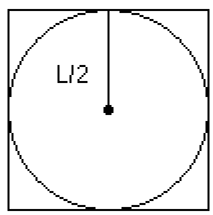
PROBLEMES NIVELL B (4rt. ESO)

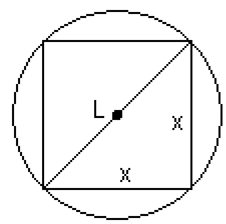
1.- EL TERCER FILL

El tercer fill de Joan té 10 anys. DIFICULTAT: 20.

2.- ÀREA OMBREJADA I

A la figura 1 podem veure que l'àrea del cercle és $A_1 = p\left(\frac{L}{2}\right)^2$. Aplicant el Teorema de Pitàgores a la figura 2, tenim $L^2 = x^2 + x^2 \rightarrow L^2 = 2x^2$.





Per tant, $x^2 = \frac{L^2}{2}$. Es a dir, l'àrea del quadrat inscrit al cercle és $A_2 = x^2 = \frac{L^2}{2}$. Així, l'àrea ombrejada és:

$$S = A_1 - A_2 = p \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{L^2}{2} = \left(\frac{p}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot L^2$$. DIFICULTAT: 20.

3.- EDATS

La filla té 24 anys i la mare 42 anys. DIFICULTAT: 30.

4.- UNA IGUALTAT

Si substituïm x per 4x i z per az, ens queda:
$4 \cdot (4x)^4 = 2 \cdot (az)^2 \rightarrow 4 \cdot 4^4 \cdot x^4 = 2 \cdot a^2 \cdot z^2 \rightarrow 4^4 \cdot (4x^4) = a^2 \cdot (2z^2)$.
Com el parèntesi són iguals, resulta: $4^4 = a^2 \rightarrow a = 4^2 = 16$. Per tant, tenim que multiplicar z per 16 per a que la igualtat siga veritat. DIFICULTAT: 20.

5.- UNA MONEDA

Per a que es complisca la condició del problema ha de ser L=1'5·l, on L es la longitud del cercle gran i l la longitud del cercle de la moneda. Aleshores, $2 \cdot p \cdot R = 1'5 \cdot 2 \cdot p \cdot r \rightarrow R = 1'5 \cdot r$. Per tant, $r = \frac{2}{3} \cdot R$. DIFICULTAT: 50.

6.- L'ANY 2000

Podem escriure el producte de la següent forma:
111111...11 × 2001 = 111111...11 × (2000 + 1) = 222222...22000 + 1111111...11. La suma de les xifres del primer nombre és: 2+2+2+...+2 = 2×2000 = 4000. D'altra banda, la suma de les xifres del segon nombre és: 1+1+1+1+...+1 = 1×2000 = 2000. Per tant, la suma de les xifres del resultat del producte és: 4000 + 2000 = 6000. DIFICULTAT: 30.

7.- CARNESTOLTES

Siguen a, b, c, d i e les quantitats posades pels meus cinc amics. Aleshores:
$\frac{10+(a+b+c+d+e)}{6}=8 \to 10+(a+b+c+d+e)=48 \to a+b+c+d+e=38$.
Per tant, la mitjana d'euros de les altres cinc amics és: $\bar{x}=\frac{a+b+c+d+e}{5}=\frac{38}{5}=7'6$ euros. DIFICULTAT: 10.

8.- ESCACS

Contem els quadrats de costats 1, 2, 3, ..., 8:

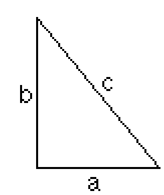
costat 1	costat 2	costat 3	costat 4	costat 5	costat 6	costat 7	costat 8
8×8	7×7	6×6	5×5	4×4	3×3	2×2	1×1

Per tant, el nombre de quadrats que n'hi ha al tauler és:
C = 1×1 + 2×2 + 3×3 + 4×4 + 5×5 + 6×6 + 7×7 + 8×8 = 204. DIFICULTAT: 30

9.- ANGLE D'UN CUB

En la figura observem que BH=AG. Per tant, l'angle que formen AD i BH és el mateix que el que formen AD i AG. Però com el triangle ADG es equilàter, l'angle que formen els seus costats AD i AG és 60º. Per tant, l'angle que formen AD i BH és de 60º. DIFICULTAT: 30.

10.- TRIANGLE



Per les condicions del enunciat, es compleix:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=18 \\ a^2+b^2+c^2=128 \\ a^2+b^2=c^2 \end{array}\right\}$$

De la primera equació: c = 18 –(a+b). Substituint en la segona equació:
$a^2+b^2+324+(a+b)^2-36\cdot(a+b)=128 \to c^2+324+c^2-36\cdot(18-c)=128$.
Per tant: $2c^2+36\cdot c-452=0 \to c^2+18\cdot c-226=0 \to$ c = 8'5 unitats.
També: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \to (18-c)^2=c^2+2ab \to ab=\frac{(18-c)^2-c^2}{2}$.
Per tant, l'àrea del triangle és: $S=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{(18-c)^2-c^2}{4}=81-9c=9\cdot(9-c)$.
Així: S = 9·(9–c) ≈ 4'3 unitats quadrades. DIFICULTAT: 40.

11.- PRODUCTES NUMÈRICS

Per les condicions del problema, considerem els nombres del 1 al 999. Qualsevol producte de dos múltiples de 3 és un múltiple de 9. Com la successió dels múltiples de 9 és aritmètica de diferència 9, la quantitat dels esmentats nombres ha de ser $\frac{999}{9}=111$. Per tant, n'hi ha 111 nombres que acomplixquen l'enunciat. DIFICULTAT: 30

12.- MESURES DE CAPACITAT

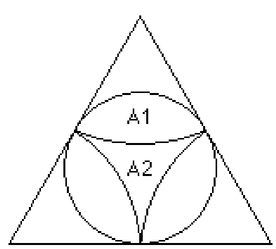
Siguen A i B les xarres de 5 i 3 litres, respectivament. Per a mesurar exactament un litre, n'hi ha que fer quatre operacions:

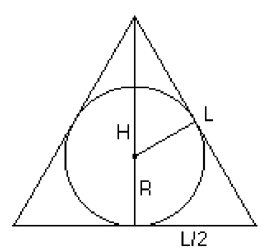
XARRA A	XARRA B	DESCRIPCIÓ
0	3	Ompli la xarra de 3 litres
3	0	Passe el contingut de la xarra B a la xarra A
3	3	Ompli la xarra de 3 litres
5	1	Passe el contingut de la xarra B a la xarra A

D'aquesta forma hem aconseguit exactament un litre a la xarra B. DIFICULTAT: 10

13.- ÀREA OMBREJADA II

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del cercle inscrit (A_1) menys l'àrea del triangle limitat per arcs (A_2). El radi R del cercle inscrit és: $R=\frac{1}{3}H$, on H és l'alçaria del triangle. Per Pitágores: $L^2=H^2+\frac{L^2}{4}\rightarrow H^2=\frac{3}{4}L^2\rightarrow H=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot L$. Per tant, $R=\frac{1}{3}\cdot H=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot H$. Aleshores: $A_1=\pi\cdot R^2=\pi\cdot\frac{L^2}{12}$





D'altra banda, $A_2=T-3\cdot M$, on T és l'àrea del triangle i M l'àrea del sector amb centre en un vèrtex. Es compleix: $T=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot L^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot L^2$ i $M=\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot\frac{L^2}{4}=\pi\cdot\frac{L^2}{24}$. Per tant: $A_2=T-3\cdot M=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot L^2-\pi\cdot\frac{L^2}{8}$. Aleshores, l'àrea ombrejada és: $S=A_1-A_2=\pi\cdot\frac{L^2}{12}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot L^2+\pi\cdot\frac{L^2}{8}=\left(\frac{5\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot L^2$. Per tant, $S\approx 0'22\cdot L^2$. DIFICULTAT: 40

IV JORNADES D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA

Facultat de Ciències. ALACANT, 14 i 15 de setembre

2000, WORLD MATHEMATICAL YEAR

Organitzen: Societat d'Educació Matemàtica Al – Khwarizmi. CEFIRE d'Alacant

Segon anunci

Està obert el termini de recepció de propostes de comunicacions, pòsters o tallers relacionats amb l'Educació Matemàtica; la Història de les Matemàtiques, les Tecnologies aplicades a les Matemàtiques (calculadores gràfiques, ordinadors, Internet, …), els estàndards curriculars en matemàtiques (Resolució de problemes, Connexions Matemàtiques, Estadística, Probabilitat, Geometria, Funcions, Àlgebra, Nombres, …), les matemàtiques en els Sistemes Educatius (Primària, Secundària, Universitat, Matemàtiques en la Diversificació Curricular, assignatures optatives, relació amb altres matèries, …); les competicions matemàtiques (Olimpíades, Concursos, …); la cultura matemàtica i les matemàtiques en la cultura; la Didàctica de les Matemàtiques (experiències, reflexions, unitats didàctiques, …); la Inteligència Artificial aplicada a l'aprenentatge de les matemàtiques, les teories de l'aprenentatge matemàtic i en general qualsevol apartat teòric o aplicat de les Matemàtiques.

Les propostes de comunicació han de ser remeses incloent còpia en paper i arxiu en format WORD per a Windows o en format text abans del 15 de juny a l'organització de les Jornades per qualsevol dels següents procediments:

Correu postal: Societat d'Educació Matemàtica Al – khwarizmi – Apartat 1009 – 03080 Alacant.
Correu electrònic: alacant@semcv.org

Informació actualitzada sobre els detalls de l'organització de les Jornades i les comunicacions admeses es troba disponible en http://www.semcv.org o bè al telèfon 617867284.

S.
E.
M.
C.
V.

AL-KHWARIZMI

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"