UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA USANDO UN PROGRAMA DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Carmen Aranda

IES Pere Mª Orts i Bosch (Benidorm)

M. Luz Callejo

Departamento de Innovación y Formación Didáctica (Universidad de Alicante)

RESUMEN

En esta comunicación se presenta el diseño de un experimento de enseñanza sobre la introducción del concepto de integral definida con estudiantes de Bachillerato (16-18 años), utilizando el programa de geometría dinámica *Geogebra*. El objetivo de este experimento es que los estudiantes construyan el concepto de integral definida desde un enfoque centrado en la resolución de problemas.

Se han diseñado tareas interactivas en las que se usan simultáneamente representaciones analíticas y geométricas, que permiten modificar los parámetros manipulando controles gráficos. Se utiliza una hoja de cálculo para que los estudiantes puedan aproximar las áreas bajo una curva, con el objetivo de que sean conscientes del proceso que lleva a obtener el área buscada con el error fijado y aproximarse de manera intuitiva al concepto de límite, subyacente al de integral definida. Se propone también tareas de lápiz y papel, en las que juega un papel fundamental la resolución de problemas y los procesos de generalización.

Siguiendo el proceso histórico, se parte del cálculo del área de figuras geométricas en el dominio de la geometría sintética, para después abordar el área bajo una curva en el de la geometría analítica. Se aproximan las áreas por métodos geométricos y series numéricas, introduciendo el límite de manera formal sólo al final, definiendo la integral. Una vez establecida la diferencia entre área e integral, se aborda el estudio de sus propiedades y al final se llega al Teorema fundamental del Cálculo integral y a la regla de Barrow

Palabras Clave

Experimento de enseñanza, Integral definida, Geometría dinámica.

1. Introducción

En esta comunicación se presenta un experimento de enseñanza (Gravemeijer, 2004) diseñado para introducir el concepto de integral definida a estudiantes de 2º curso de Bachillerato de las especialidades de Ciencias de la Naturaleza y Tecnología (17-18 años). Este experimento se enmarca en un trabajo de investigación cuya fase experimental se ha llevado a cabo en el curso 2009-2010 con un grupo de 14 alumnos que han trabajado por parejas. Con el propósito de analizar el experimento se han grabado las sesiones mediante el programa *CamStudio*, que permite realizar la grabación en vídeo de lo que sucede en la pantalla del ordenador, y en audio las conversaciones de los alumnos. En el experimento se ha puesto especial énfasis en el proceso de construcción del concepto de integral definida y en la resolución de problemas, y se ha diseñado utilizando recursos tecnológicos.

Para potenciar la construcción de los conceptos relativos al análisis matemático Artigue (1991) sugiere buscar un mejor equilibrio entre las diferentes representaciones de los mismos: la geométrica, la analítica/numérica, la analítica/algebraica y la verbal. Por otra parte Duval (2006) indica que construir el significado de los objetos matemáticos implica la capacidad de transformación de las representaciones, que admite dos formas la *conversión* y el *tratamiento*, según que cambie o se mantenga el sistema semiótico, y la *coordinación interna* entre representaciones, ya que la mera yuxtaposición simultánea de varias representaciones de un mismo objeto es insuficiente pues se limita a un reconocimiento mediante asociaciones que son particulares en cada caso.

En este sentido algunos autores proponen el uso de las tecnologías como instrumentos de mediación semiótica para introducir conceptos y relaciones matemáticos, gracias a su potencialidad para presentar simultáneamente varias representaciones de un mismo concepto y para favorecer la interacción y el dinamismo (Blume y Heid, 2008; Heid y Blume, 2008; Lagrange y Artigue, 2009; Maschietto, 2008; Tall, Smith y Piez, 2008). Pero advierten que el uso de herramientas computacionales, por sí mismas, no resuelve los problemas de enseñanza del análisis, pues es necesario un contexto coherente de enseñanza/aprendizaje (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006).

En este trabajo exponemos algunas consideraciones relativas a la introducción del cálculo integral, mencionaremos algunas propuestas que utilizan software de geometría dinámica y finamente presentamos nuestra propuesta.

2. Introducción del concepto de integral definida

Hay diversas aproximaciones didácticas al concepto de integral definida, entre otras, presentarlo como una aplicación de las primitivas para calcular áreas mediante la regla de Barrow o definir la integral en lenguaje algebraico para después ver su interpretación geométrica. Cuando se introduce como el cálculo del área bajo la curva se plantea la cuestión de cuándo una región del plano es medible y definir una función área que permita medirla. Este concepto se apoya en el concepto de límite, difícil de comprender para los estudiantes, lo que supone un obstáculo para su aprendizaje.

Ferrara, Pratt y Robutti (2006) proponen usar la tecnología para tratar la integral, primero a nivel numérico y gráfico, como sumas de 'tiras' de anchura cada vez más pequeña, y después a nivel simbólico.

Para Guzmán (1997) la integral definida es un concepto fundamental del cálculo, que se inicia con Arquímedes y responde al problema del cálculo del área bajo una curva:

> "La noción de integral proviene directamente de la intención de calcular algo tan visual como el área de una cierta figura. Ya Arquímedes realizó unas cuantas proezas en el siglo III a. de. C. calculando de hecho integrales muy interesantes" (p. 238).

Este autor propone una secuencia didáctica en la que, siguiendo a Arquímedes, empieza con el cálculo del área del círculo y el método de 'agotamiento' o exahución usando el programa *Derive*, y después aproxima el área bajo una gráfica mediante rectángulos cuya altura es un punto arbitrario del intervalo, haciendo que la longitud de los subintervalos (base de los rectángulos) tienda a cero. Después, con lápiz y papel, explora visualmente las propiedades de la integral y demuestra el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow.

El programa *Derive* también lo han utilizado Camacho, Depool y Santos-Trigo (2010) con estudiantes universitarios planteando problemas e integrales de funciones a trozos, y afirman que el registro algebraico queda oculto por el software.

Courant y Robbins (2002) sugieren lo siguiente:

> "Siguiendo Arquímedes y a los grandes matemáticos hasta el tiempo de Gauss, podemos tomar la actitud "ingenua" de que las áreas limitadas por líneas curvas son entidades dadas intuitivamente y de que la cuestión no es definirlas sino calcularlas" (p.439)

y proponen calcular el área del círculo y bajo un segmento de parábola por "agotamiento", es decir rellenando con polígonos siguiendo una secuencia parecida a la que propone Guzmán.

El proyecto *Descartes*[1] también plantea varias aproximaciones didácticas usando dicho applet.

En este experimento se han diseñado escenas (tareas interactivas) usando el software de geometría dinámica (SGD) *Geogebra*, para llevar a cabo una secuencia didáctica usando de manera simultánea y conectada los lenguajes geométrico y analítico. Los estudiantes trabajaron por parejas y se les proporcionó guías con las tareas, que debían resolver con la ayuda de las escenas, y ocasionalmente con una hoja de cálculo, con calculadora o con lápiz y papel. Cada pareja escribió en las hojas de tareas sus respuestas y reflexiones. Al principio de cada sesión se hacía una puesta en común sobre lo que habían trabajado la sesión anterior. Se pretendió así fomentar la reflexión para que su trabajo no se convirtiera en un mero ejercicio de manipulación de las escenas, y la verbalización de sus ideas.

3. Estructura del experimento de enseñanza.

Nuestro experimento tiene dos partes: en la primera se aborda el problema del cálculo del área en casos particulares, en el dominio de la geometría sintética y analítica, y en la segunda se aborda el mismo problema en el caso general.

La primera parte comienza con el cálculo del área del círculo mediante el método de 'agotamiento', con polígonos regulares inscritos y circunscritos, aumentando el número de lados. Se introduce así la idea de límite de manera gráfica, apoyándose en el lenguaje de la geometría sintética; a continuación, tras obtener una fórmula general para el área de dichos polígonos, se calcula el límite de forma analítica. Por último se trabaja el cálculo del área bajo una gráfica en funciones particulares (lineales, afines y cuadráticas).

En la segunda parte se busca un método de resolución del problema planteado, el cálculo del área bajo una gráfica, en funciones continuas cualesquiera. Tras definir la integral como un límite, y por tanto desvincularla del área, estudiamos sus propiedades, abordamos el teorema fundamental del cálculo integral para llegar por fin a la regla de

[1]http://recursostic.educacion.es/descartes/web

Barrow que demostraremos analíticamente (Guzmán, 1997). Usamos pues los lenguajes geométrico, analítico/numérico y analítico/algebraico.

Según esta secuencia las tareas se agrupan en dos grandes bloques (Figura 1).

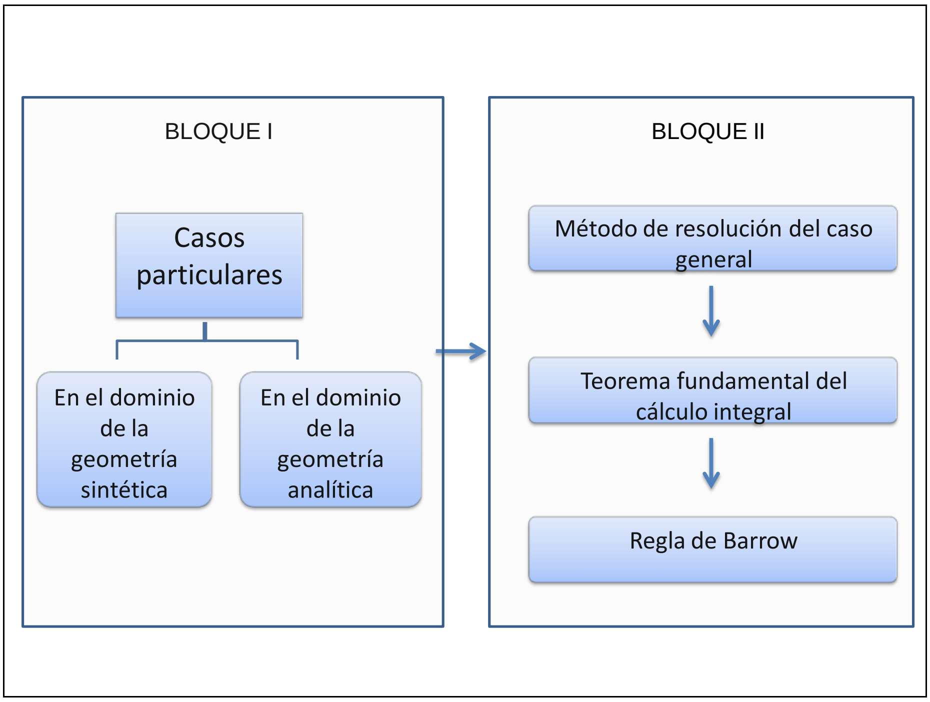

Figura 1. Estructura del experimento de enseñanza

Para la realización de algunas tareas, los estudiantes cuentan con el apoyo de escenas diseñadas específicamente para este experimento con *Geogebra* (11 tareas); otras (6 tareas) son de lápiz y papel. En unos casos se pide obtener fórmulas generales y en otros se pide observar propiedades y hacer demostraciones.

Los estudiantes van resolviendo las tareas a su ritmo, y cuando han acabado se les proponen más. Al inicio de cada sesión la profesora y los alumnos revisan las tareas de la clase anterior para 'institucionalizar' los nuevos conocimientos y que aquellos que no consiguieron acabar las tareas previstas en la sesión anterior puedan resolver las previstas para la sesión.

4. Ejemplos de escenas

A continuación mostramos algunas de las escenas diseñadas, dos correspondientes al primer bloque y tres al segundo. Una guía de trabajo proporcionada a los estudiantes se muestra en Anexo

4.1 Primer Bloque

Hemos seleccionado dos escenas. La primera, 'Parábola [0,1]', tiene como objetivo calcular el área bajo un segmento parabólico, $y = x^2$ en el intervalo $[0,1]$ y la segunda, 'Parábola [0,5]', obtener la fórmula de la diferencia entre las sumas superiores e inferiores al calcular el área en el intervalo $[0,5]$.

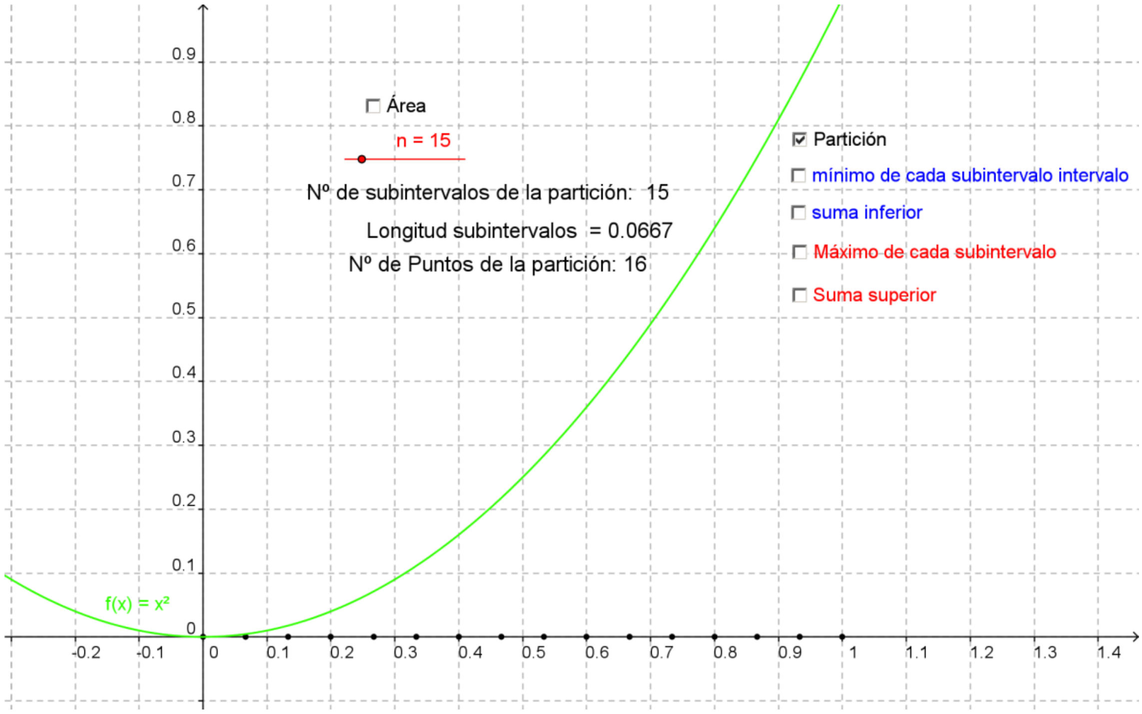

Figura 2. Escena 'Parábola [0,1]'. Primera tarea.

En la primera de las escenas, 'Parábola [0,1] mostrada en la figura 2, junto a la gráfica de la parábola hay varias casillas de control para exponer/ocultar objetos, así como un deslizador con el que se puede cambiar el número de puntos de la partición, el número de subintervalos y su longitud. Introducimos así primero la noción de partición, después las sumas superiores e inferiores a la vez que nos acercamos geométricamente a la idea de límite. Tienen que completar una hoja de cálculo o una tabla con las sumas superiores e inferiores. De esta forma se busca que los estudiantes relacionen las representaciones geométrica y analítica del concepto.

En esta escena se apoyan tres tareas. A los estudiantes se les pide en la primera tarea relacionar el valor de 'n' con el nº de puntos de la partición y la longitud de los subintervalos. También que escriban los valores de los puntos extremos de los subintervalos de la partición cuando n toma los valores 1, 2, 3, … y para cualquier valor de n.

Para trabajar la segunda tarea, se desactivan las casillas de control referentes a la partición y se activan las correspondientes a las sumas superiores e inferiores y la diferencia entre ellas, como se muestra en la figura 3. Al aumentar n, número de subintervalos, mediante el deslizador, introducimos de manera intuitiva mediante el lenguaje geométrico y analítico/aritmético la aproximación al área de la región bajo la curva y la idea de límite.

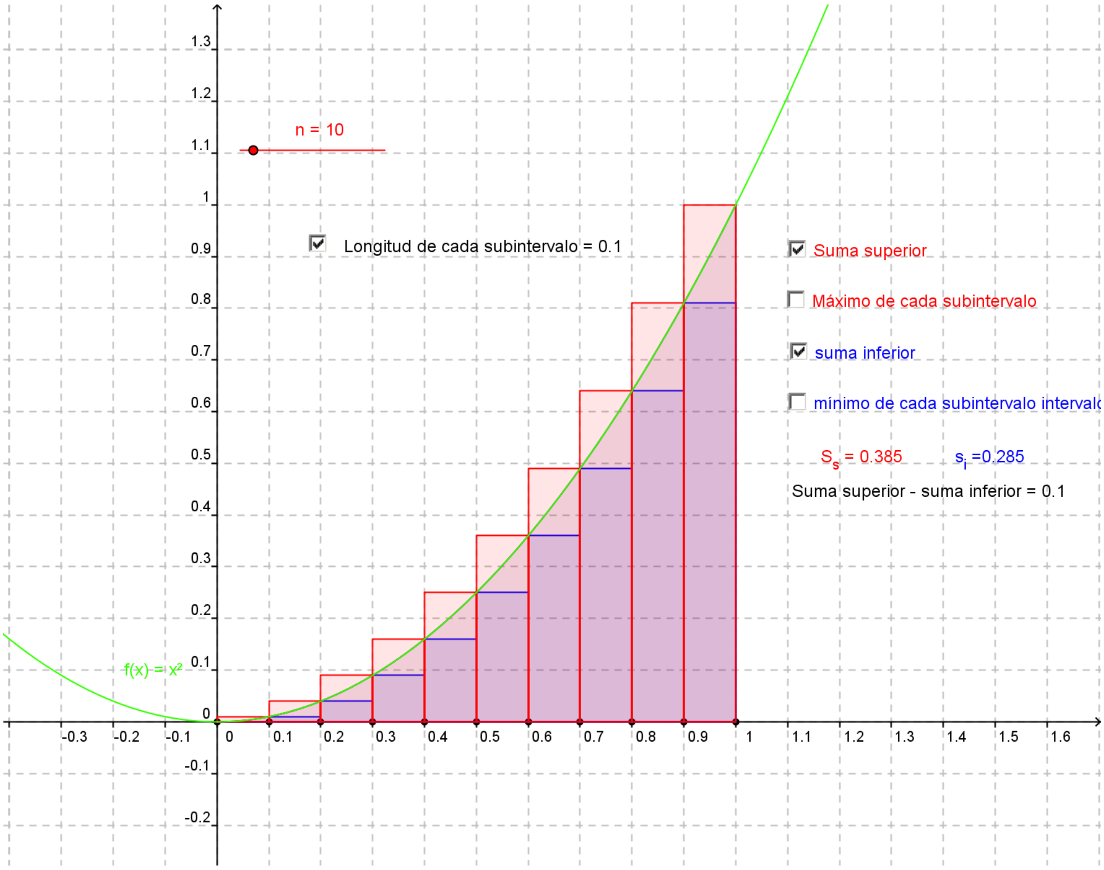

Figura 3. Escena 'Parábola [0,1]'. Segunda tarea.

Se pide a los estudiantes una fórmula para las sumas relacionando las alturas de los rectángulos con los puntos de la partición

La tercera tarea es una tabla u hoja de cálculo. Pueden resolverla con ayuda de una hoja de cálculo que les proporcionamos o con la tabla en papel y calculadora. Con esta tarea intentamos que los estudiantes 'vean' el proceso que hay detrás de lo que han visto en las tareas anteriores.

En la segunda escena 'Parábola [0,5]', a la que corresponde la figura 4 y cuya guía de trabajo se puede ver en el anexo, se muestran geométrica y analíticamente las sumas superiores e inferiores, y un rectángulo con la diferencia entre ambas. Se pide a los estudiantes que observen la diferencia entre las sumas superiores e inferiores y la comparen con el área del rectángulo rojo. Se trata de encontrar la fórmula general para esta diferencia, que es 5^2 * longitud subintervalo.

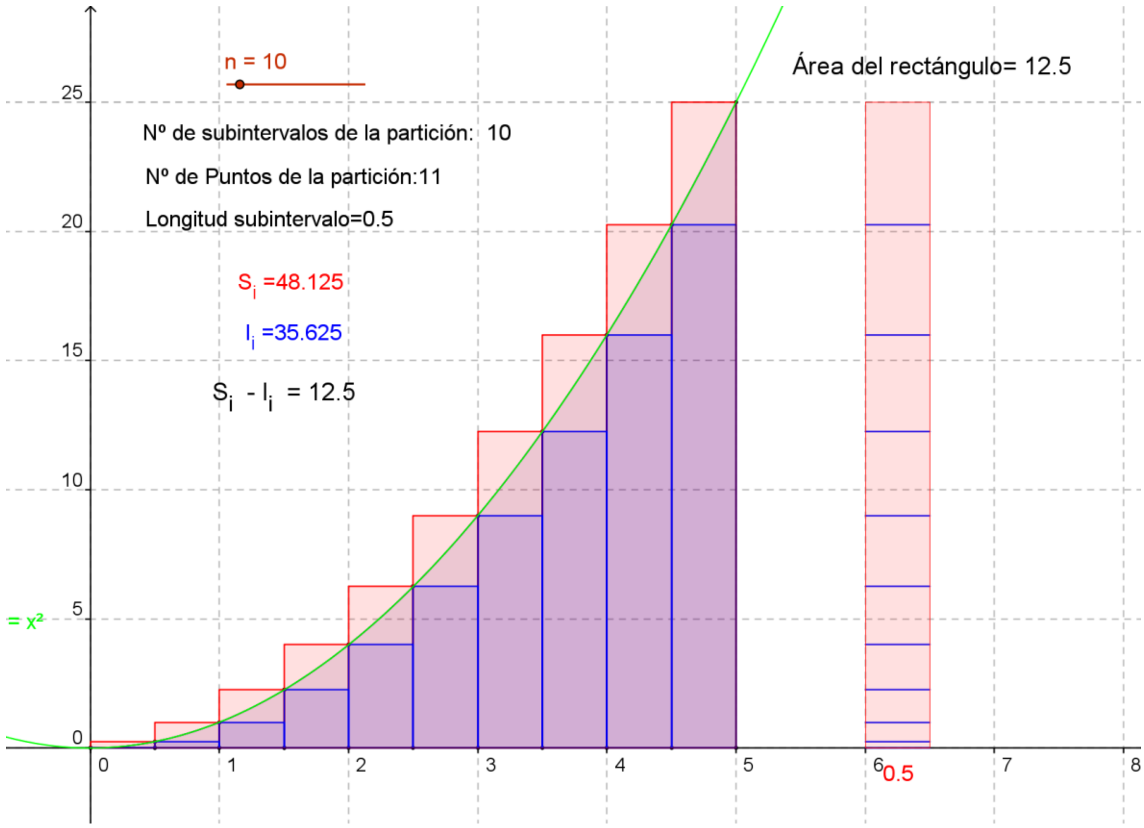

Figura 4. Escena 'Parábola [0,5]'

Después se pide el número de subintervalos para que el error sea menor a unos valores dados, y a un valor cualquiera, la fórmula general.

A continuación se plantea a los alumnos que han completado las tareas dos problemas en los que es necesario este concepto y este método y que pueden resolver como quieran, con *Geogebra*, calculadora gráfica o lápiz y papel, el cálculo del área de la sección transversal de un edificio con cúpula parabólica y el cálculo de la distancia conocida la fórmula de la velocidad, v(t), cuya representación gráfica es una parábola (Azcárate, Casadevall, Casellas y Bosch, 1996). También se les propone tareas de generalización y cálculo del límite, que obtengan la fórmula general de las sumas superiores e inferiores para la parábola de la 'Parábola [0,5]' y el cálculo del límite. El resto continúa con las tareas anteriores.

En una puesta en común con toda la clase, se hace observar que el límite calculado es el mismo valor que habían obtenido antes en las tareas de la escena 'Parábola [0,5] usando los lenguajes geométrico y analítico/numérico y que obtienen el área exacta, relacionando el lenguaje algebraico con los otros dos.

Hacemos notar que este método de cálculo del área es laborioso y poco potente, y se hace necesario obtener un método general.

4.2. Segundo Bloque.

El segundo bloque empieza con la definición formal de integral definida, considerando la integral como un número asociado a una función, el límite de las sumas superiores e inferiores. Consideramos funciones continuas, y por tanto integrables, pero superamos las restricciones que hemos impuesto hasta ahora a las funciones, que sean positivas, y a los intervalos de integración, que el extremos inferior sea menor que el superior, y tratamos la integral como un número que hay que calcular, desligándolo del área. Tal y como indican Courant-Robbins (2002):

> "Una vez formalizado, la formulación analítica del proceso de límite hará posible descartar las suposiciones restrictivas $f(x) \geq 0,\ a < b$ y finalmente eliminar el concepto intuitivo de área." (p. 441).

Así, al definir la integral definida como límite, se realizan tareas con el apoyo de escenas de *Geogebra* para establecer la diferencia entre el área y la integral y comprobar las propiedades de la integral definida. Las tareas de este bloque se apoyan en 9 escenas, en las que se trata la diferencia entre área e integral, las propiedades de la integral, la función integral y el Teorema Fundamental del Cálculo integral. Por último demostramos con lápiz y papel la regla de Barrow.

Describiremos tres escenas del apartado 'Teorema fundamental del cálculo integral': 'Función Integral I', 'Función Integral II' y el Teorema Fundamental del cálculo integral..

En la escena 'Función Integral I', a la que corresponde la figura 5, se muestra la integral definida de funciones lineales o afines entre el extremo inferior a=0 y un extremo superior, t, que pueden variar moviendo el punto azul con el ratón. Inicialmente la función es f(x)=-2 y t>0 y por tanto la integral es negativa. Se pidió a los estudiantes que escribieran la función integral para a=0 y t=2 para el caso de rectángulos (m=0), de triángulos (n=0) y de trapecios, a partir de las fórmulas de las áreas de los polígonos, dado que conocen las fórmulas de las áreas de rectángulos, triángulos y trapecios. Después una fórmula para cualquier valor de t.

Una vez obtenida estas funciones pueden variar el valor de a, extremo inferior del intervalo.

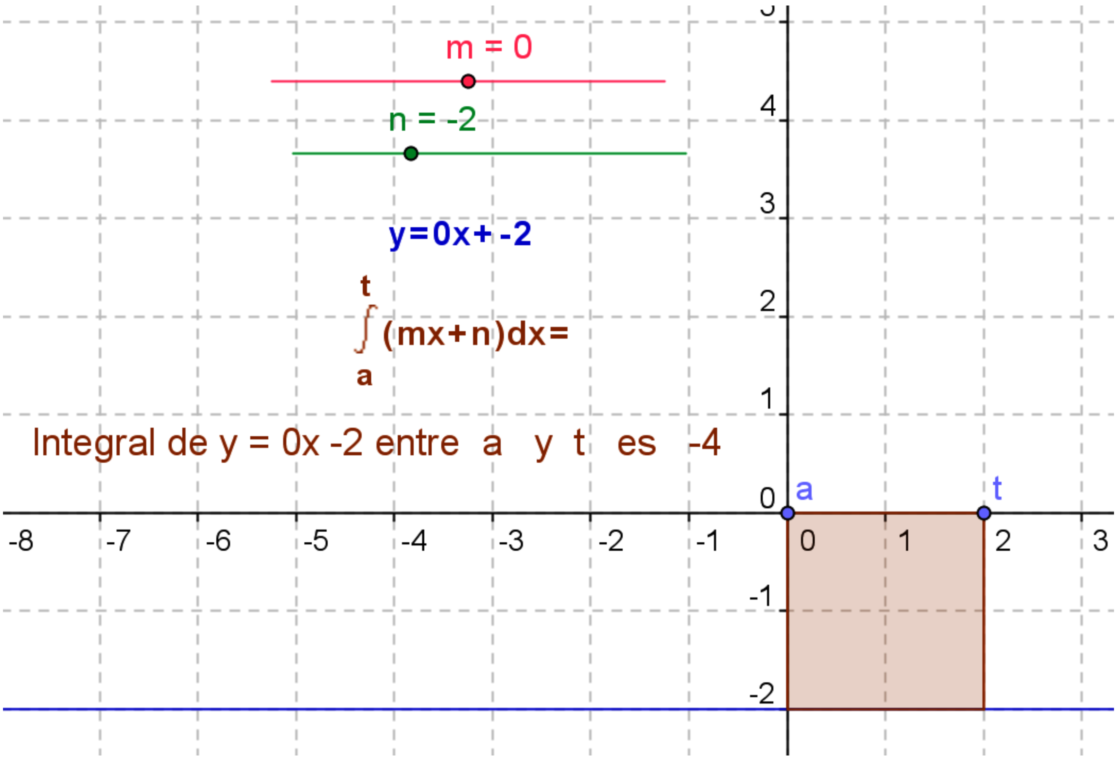

Figura 5. Escena 'Función Integral I'

Tras la realización del trabajo indicado en la guía se les propuso un ejercicio de lápiz y papel para que dibujaran, aproximadamente, las gráficas de las funciones que nos ofrezcan el área bajo la dos trozos de rectas, en intervalos en que la función es positiva y fijado el valor inicial del intervalo de integración y en la escena 'Función Integral II'[2], a la que corresponde la figura 6, comprobaron los resultados de los ejercicios de lápiz y papel. En caso de error, podían buscar de nuevo la función integral.

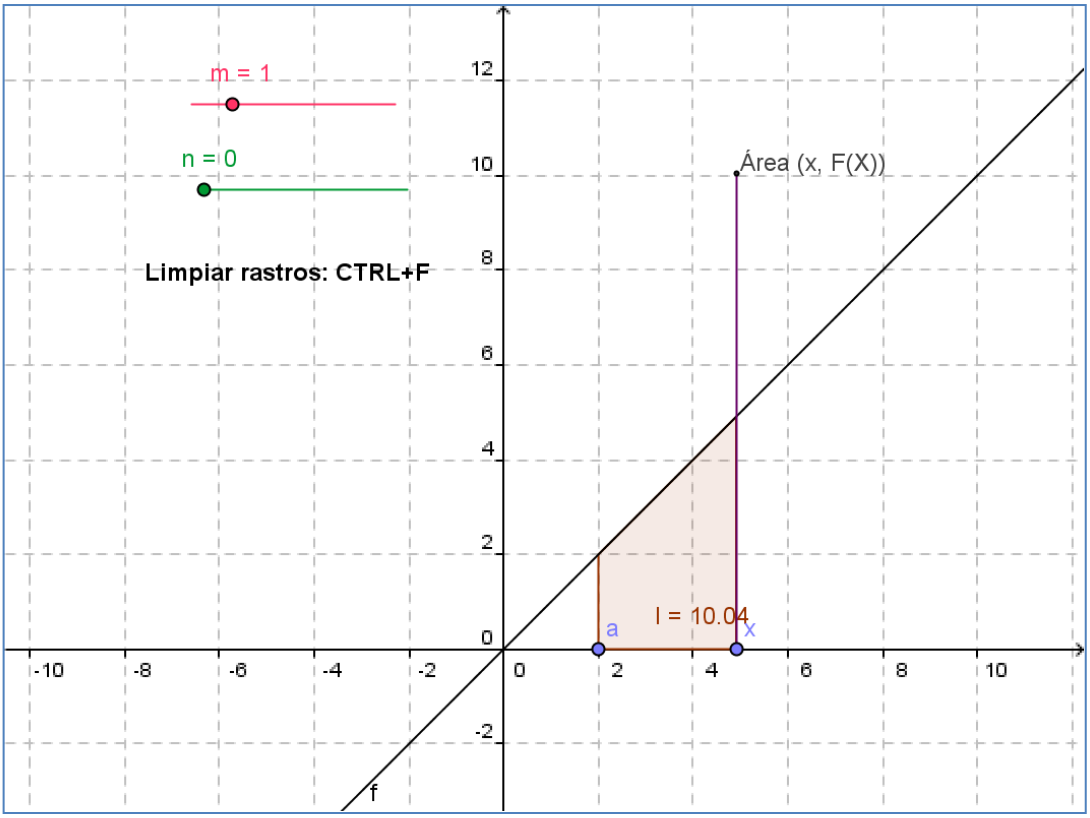

Figura 6. Escena 'Función Integral II'

En las escenas 'Teorema Fundamental del Cálculo', pueden ver en lenguaje geométrico y analítico/aritmético que los límites de las tasas de variación media de la función integral son la función dada. Hay una escena para el límite por la derecha y otra para el límite por la izquierda. La figura 7 corresponde al límite por la derecha. Moviendo el deslizador, disminuyendo el valor de h, y para el valor de x dado, pueden ver como la tasa de variación media (TVM) se aproxima a f(x).

[2] Adaptación de una escena de Manuel Sada Allo. http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/index.htm

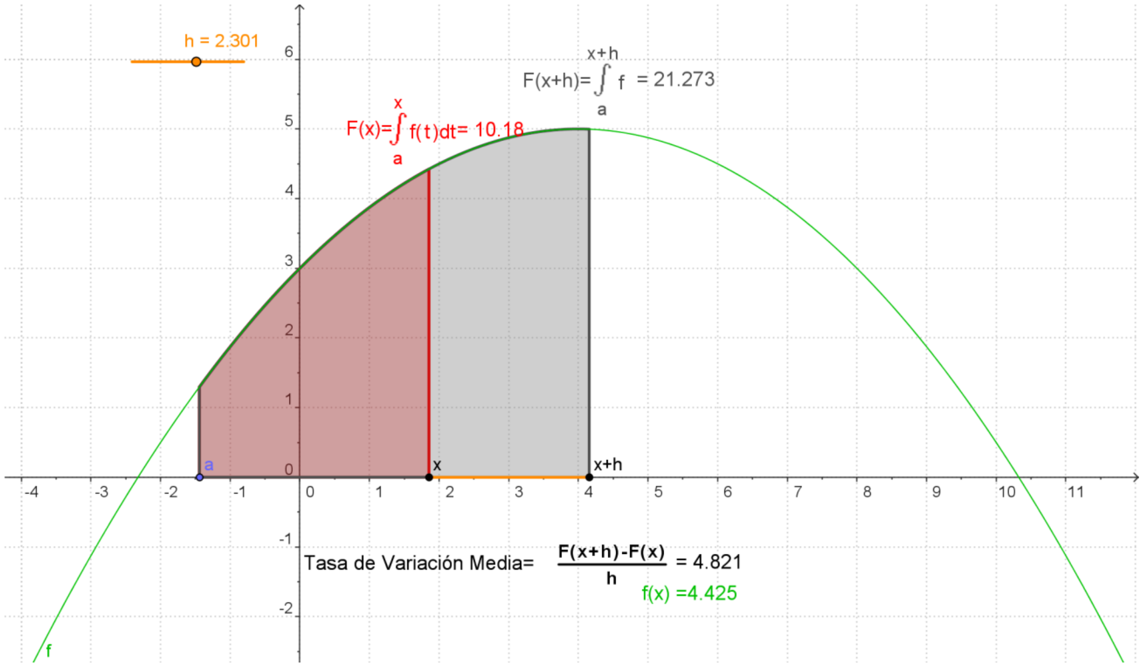

Figura 7. Escena 'Teorema Fundamental del Cálculo, h>0'

Pueden cambiar el valor de x desplazándolo con el ratón y repetir el proceso. Se pide a los estudiantes que escriban los valores de la TVM que van obteniendo para los distintos valores de h y el límite.

Por último se les pide que escriban el teorema fundamental del cálculo y se les indica que si f es continua, se puede demostrar la continuidad y derivabilidad de la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ utilizando lápiz y papel.

5. Reflexiones finales

En este experimento de enseñanza hemos utilizado un programa de geometría dinámica para diseñar escenas en las que apoyarse para realizar las tareas propuestas. En las escenas se muestran de manera simultánea las representaciones analíticas y geométricas, de carácter dinámico e interactivo, vinculadas con el concepto de integral definida con el objetivo de fomentar las acciones cognitivas necesarias para que se dé la *coordinación interna* (Duval, 2006) entre la representación analítica y geométrica necesaria para que los estudiantes construyan el concepto de integral definida.

Hemos tenido en cuenta en el diseño del experimento que "la yuxtaposición de dos representaciones de un mismo objeto en dos registros diferentes no puede resolver el problema cognitivo del reconocimiento del mismo objeto representado, porque las diferencias de contenido de las representaciones varían independientemente de los objetos representados", así como la necesidad de la *doble discriminación* para convertir una u otra de estas dos representaciones (Duval, 2006, p. 159). Y hemos buscado potenciar en los estudiantes "ver diferencias entre dos representaciones que parecen globalmente semejantes"; por otra, "ser capaz de distinguir en las representaciones de un registro las características del significante que son matemáticamente pertinentes, para relacionarlas con una representación en otro registro, y las características significativas en un registro que no lo son para la conversión en el otro registro” (2006, p. 160).

Como precisa Duval, “cambiar la representación de objetos o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro es siempre un salto cognitivo” (2006, p. 150) pues supone pasar del carácter cualitativo y global de la representación geométrica al carácter lineal, operativo y simbólico de la representación analítica, o viceversa. El análisis de los datos obtenidos en el experimento a través del test, las hojas de tareas y las grabaciones, nos permitirá saber en qué medida nuestro experimento ha contribuido a la construcción del concepto de integral definida mediante la *coordinación* de las representaciones.

Referencias

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher

Azcárate, C., Casadevall, M., Casella, E., Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis

Blume, G.W. y Heid, M.K. (2008). The role of research, theory, and practice in the integration of technology in mathematics teaching and learning. En M.K. Heid y G.W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*. *Research Syntheses*. Vol. 2 (pp. 449-464). Charlotte N.C.: NCTM-IAP.

Camacho, M., Depool, R. y Santos-Trigo, M. (2010). Students' use of Derive software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. *CBMS. Issues in Mathematics Education, 16*, 29-61.

Botella, L. M., Cascón, B., Martín, C., Millán, L.M., Moltó, C., Pérea, C. Y Salinas, E. (2001). *Matemáticas, 2º Bachillerato Logse. Ciencias de la Naturaleza y la Salud y Tecnológico*. Alcoi: Marfil.

Courant, R. y Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168

Ferrara, F., Pratt, D. y Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 237-274). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6 (2)*, 105-128.

Guzmán, M. (1997). *El rincón de la pizarra*. *Ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid: Pirámide.

Heid, M.K. y Blume, G. W. (2008) Technology and the teaching and learning mathematics. *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*. *Research Syntheses*, Vol. 2 (pp. 419-431). Charlotte N.C.: NCTM-IAP.

Lagrange , J.B. y Artigue, M. (2009). Students' activities about functions at upper secondary Level: A grid for designing a digital environment and analysing uses. En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. y Sakodidis, H. (Eds.). *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 3 (pp 465-472). Thessaloniki, Greece: PME.

Maschietto, M. (2008). Graphic calculators and micro-straightness: analysis of a didactic engineering. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*(3), 207-230

Tall, D., Smith, D. y Piez, C. (2008). Technology and calculus. En M.K. Heid y G.W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*. *Research Syntheses*. Vol. 1 (pp. 207-258). Charlotte N.C.: NCTM-IAP.

ANEXO. Guía de trabajo de la escena Parábola [0,5]

Mueve el deslizador **n** y observa cómo varían los rectángulos superiores e inferiores y el rectángulo rojo de la derecha:

I. Trata de identificar alguna relación. ¿Ocurre lo mismo que en el ejercicio anterior respecto a las diferencias $\mathbf{S_i}$-$\mathbf{I_i}$?

II. Busca una fórmula para el área del rectángulo rojo de la derecha dependiendo del valor de n. Para ello necesitas saber la base y la altura del rectángulo.

1. ¿La altura depende de **n**? Altura=

2. ¿La base depende de **n**? Calcula la base del rectángulo para:

    a. **n=10**, Base=

    b. **n=20**, Base=

    c. **n= 50**, Base=

    d. ....

    e. **n** , Base=

b. Obtén una fórmula para las diferencias entre las **sumas superiores** e **inferiores** dependiendo del valor de n.

c. Identifica la relación entre el área del rectángulo amarillo y el **error máximo** cometido al aproximar el área.

d. Si error máximo es 0,1 ¿cuántos intervalos tienes que coger?

e. ¿y si es 0,01?

¿Podrías encontrar un procedimiento para determinar un valor de **n** que permita calcular el área con un error menor que un número tan pequeño como se quiera?